3-4 指數與對數—對數函數
【目標】
能認識對數函數，並理解同底的對數函數圖形與指數函數圖形對直線 \( y = x \) 對稱，透過指數函數的圖形了解對數函數圖形的凹凸性，進而能解簡易的對數方程式與不等式。
【定義】
1. 對數函數
設正實數 \( a \neq 1 \)，函數 \( f(x) = \log_a x \) 稱為以 \( a \) 為底的對數函數，其中 \( x \) 可取任意正實數，此函數的圖形是坐標平面上所有點 \((x, \log_a x)\) 所形成。
【性質】
對數函數 \( y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0 \) 圖形的特性：
1. 正實數 \( a > 1 \) 時，以 \( a \) 為底的對數函數 \( y = \log_a x \) 與以 \( a \) 為底的指數函數 \( y = a^x \)，兩者的圖形對稱於直線 \( y = x \)。
   註：
   這是因為 \( y = \log_a x \iff x = a^y \)。對摺翻印時，\( x \) 與 \( y \) 的角色會互換。所以 \( x = 2^y \) 就變成 \( y = 2^x \)。事實上，如果將以 2 為底的指數函數 \( y = 2^x \) 與以 2 為底的對數函數 \( y = \log_2 x \)，兩函數圖形在同一坐標平面上，則兩者對稱於直線 \( y = x \)。
2. \( y = \log_a x \) 圖形的性質：
   （1）曲線完全在 \( y \) 軸右方，即真數 \( x \) 恒正，且過定點 \((1,0)\)。
   （2）當 \( a > 1 \) 時，曲線為由左到右上升的曲線；
   當 \( 0 < a < 1 \) 時，曲線為由左到右下降的曲線。
   （3）曲線往上、往下都沒有界限，且以 \( y \) 軸為漸近直線。
   （4）當 \( a > 1 \) 時，曲線凹口向下；
   當 \( 0 < a < 1 \) 時，曲線凹口向上。
3. \( a > 1 \) 時，\( y = \log_a x \) 的圖形可由 \( y = \log_2 x \) 的圖形以 \( x \) 軸為基準，先沿 \( x \) 軸作鏡像，再沿 \( y \) 軸作鏡像而得。
4. 設正實數 \( a \neq 1 \)，則以 \( a \) 為底的對數 \( y = \log_a x \) 與以 \( \frac{1}{a} \) 為底的對數函數 \( y = \log_{\frac{1}{a}} x \)，兩者的圖形對稱於 \( x \) 軸。
5. (對數律) 對於任意實數 \( x, y \)，恆有
   
   (1) \( f(xy) = f(x) + f(y) \)。

   (2) \( f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) \)。

6. 遞增、遞減:
   
   設正實數 \( a \neq 1 \)，對數函數 \( f(x) = \log_a x \)。

   (1) \( a > 1 \) 時，\( y = f(x) \) 是嚴格遞增函數
   
   （即 \( a > 1 : x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \)）。

   (2) \( 0 < a < 1 \) 時，\( y = f(x) \) 是嚴格遞減函數
   
   （即 \( 0 < a < 1 : x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \)）。

7. 一對一函數:
   
   平行於 \( x \) 軸的每一條直線都至多與 \( y = \log_a x \) 的圖形交於一點。

8. 當 \( a > 1 \) 時，圖形由左往右上升，且底數 \( a \) 越大，上升的速度越慢，當 \( x \to 0 \) 時，圖形趨近 \( y \) 軸，稱 \( y \) 軸是 \( y = \log_a x \) 圖形的漸近線。

   即當 \( a > 1 \) 時，若 \( x_1 > x_2 \)，則 \( \log_a x_1 > \log_a x_2 \)

   \( \Leftrightarrow f(x) = \log_a x \) 為遞增函數 \( \Leftrightarrow f(x) = \log_a x \) 的圖形向右上升

   當 \( 0 < a < 1 \) 時，圖形由左往右下降，且底數 \( a \) 越小，下降的速度越慢，當 \( x \to 0 \) 時，圖形趨近 \( y \) 軸，稱 \( y \) 軸是 \( y = \log_a x \) 圖形的漸近線。

   即當 \( 0 < a < 1 \) 時，若 \( x_1 > x_2 \)，則 \( \log_a x_1 < \log_a x_2 \)

   \( \Leftrightarrow f(x) = \log_a x \) 為遞減函數 \( \Leftrightarrow f(x) = \log_a x \) 的圖形向右下降

10. 對數函數圖形的凹凸性:
   
   (1) 當 \( a > 1 \) 時，\( f(x) = \log_a x \) 的圖形為凹向下，

       即圖形上任兩點 \( A, B \) 的連線段在 \( A, B \) 兩點間 \( f(x) = \log_a x \) 的圖形下方，

       因此 \( \frac{1}{2} (\log_a x_1 + \log_a x_2) \leq \log_a \frac{x_1 + x_2}{2} \)，其中 \( x_1, x_2 \) 為任意的正實數。

       (利用 \( \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \)，再兩邊取對數即得證)

   (2) 當 \( 0 < a < 1 \) 時，\( f(x) = \log_a x \) 的圖形為凹向上，

       即圖形上任兩點 \( A, B \) 的連線段在 \( A, B \) 兩點間 \( f(x) = \log_a x \) 的圖形上方，

       因此 \( \frac{1}{2} (\log_a x_1 + \log_a x_2) \geq \log_a \frac{x_1 + x_2}{2} \)，其中 \( x_1, x_2 \) 為任意的正實數。

       (利用 \( \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \)，再兩邊取對數即得證)
【討論】
1. 試利用 $y = \log_2 x$ 的圖形作出 $y = 2 \log_2 x$ 的圖形。
   解答：
   設點 $P(x_0, y_0)$ 在 $y = \log_2 x$ 的圖形上，
   則 $y_0 = \log_2 x_0$，於是 $2y_0 = 2 \log_2 x_0$，
   故點 $Q(x_0, 2y_0)$ 在 $y = 2 \log_2 x$ 的圖形上。
   所以將 $y = \log_2 x$ 的圖形以 $x$ 軸為基準伸縮2倍，
   使得 $y = 2 \log_2 x$ 的圖形。

2. 可知將以 2 為底的對數函數 $y = \log_2 x$ 的圖形以 $x$ 軸為基準適當伸縮，就可以
   分別得到以 $\sqrt{2}$ 為底或以 4 為底的對數函數圖形。事實上，對任意實數 $a > 1$，
   只要令正實數 $k = \frac{1}{\log_2 a}$，則由換底公式知 $\log_a x = \frac{\log_2 x}{\log_2 a} = k \log_2 x$，故以 $a$ 為
   底的對數函數 $y = \log_a x$ 的圖形都可以用 $y = \log_2 x$ 的圖形以 $x$ 軸為基準伸縮 $k$
   倍得到。當然，要用 $y = \log_{10} x$ 的圖形伸縮也是可以的。

【定義】
1. 點對稱：
   給與平面上兩點 $P, Q$，如果直線 $L$ 是直線 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線時，
   稱 $P$ 與 $Q$ 對稱於 $L$，$Q$ 稱為 $P$ 對於 $L$ 的對稱點。

2. 圖形對稱：
   給與平面上兩圖形 $G, G'$，直線 $L$ 是同一平面上的一條直線，如果
   （1）$G$ 上的每一點 $P$ 對於 $L$ 的對稱點 $P'$ 都在圖形 $G'$ 上。
   （2）$G'$ 上的每一點 $P'$ 對於 $L$ 的對稱點 $P$ 都在圖形 $G$ 上。
   那麼就稱圖形 $G$ 與 $G'$ 對稱於直線 $L$，$G$ 與 $G'$ 稱為對於 $L$ 互相對稱的圖形，
   $L$ 稱為圖形 $G$ 與 $G'$ 的對稱軸。
   註：
   以上兩條件皆須成立，才稱圖形對稱。

【問題】
1. 函數 $y = 2^x$ 的圖形與函數 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形對稱於那一條直線？
2. 函數 $y = 2^x$ 的圖形與函數 $y = 2^{-x}$ 的圖形對稱於那一條直線？
3. 函數 $y = \log_2 x$ 的圖形與函數 $y = \log_1 x$ 的圖形對稱於那一條直線？
4. 函數 $y = \log_2 x$ 的圖形與函數 $y = -\log_2 x$ 的圖形對稱於那一條直線？
【問題】
1. 試畫出 $y = \log_2 x$ 的圖形。
2. 試畫出 $y = \log_3 x$ 的圖形。
3. 試畫出 $y = \log_\frac{1}{2} x$ 的圖形。
4. 試畫出 $y = \log_\frac{1}{3} x$ 的圖形。

5. 觀察上述幾個圖形中，哪幾個為互相對稱的圖形？
注：
底數互為倒數的兩對數函數，其圖形對稱於 $x$ 軸。
【問題】
試利用平移、旋轉、伸縮、對稱等幾何方法畫出下列圖形：
1. 試畫出 \( y = \log x \) 的圖形。
2. 試畫出 \( y = \log(-x) \) 的圖形。
3. 試畫出 \( y = -\log x \) 的圖形。
4. 試畫出 \( y = -\log(-x) \) 的圖形。
5. 試畫出 \( y = (\log x) + 1 \) 的圖形。
6. 試畫出 \( y = \log(x + 1) \) 的圖形。
7. 試畫出 \( y = \log|x| \) 的圖形。
8. 試畫出 \( y = -\log|x| \) 的圖形。
9. 試畫出 \( y = |\log x| \) 的圖形。
10. 試畫出 \( y = |\log(-x)| \) 的圖形。
11. 試畫出 \( y = \log(x^2) \) 的圖形。（註：\( y = \log(x^2) = 2\log|x| \)）
12. 試畫出 \( y = \log(2x) \) 的圖形。
【方法】
1. 對數形式的問題中，比較大小的常用方法有如下幾種：
   (1) 化成同底數。
   (2) 化成同真數。
   (3) 與0,1比較大小。
   (4) 兩兩相比。
   (5) 取指數。
【性質】
對數比較大小時所使用的性質：
1. 當$a > 1$ (嚴格遞增)：
   (1) $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$。
   (2) $x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0$。
2. 當$0 < a < 1$ (嚴格遞減)：
   (1) $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$。
   (2) $x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0$。
【比較】
同底的指數函數$f(x) = a^x$的圖形與對數函數$g(x) = \log_a x$的圖形比較如下：
1. $f(x) = a^x$ 與 $g(x) = \log_a x$ 的圖形對稱於直線$L: y = x$。
   證明：
   點$P(r, s)$在$y = a^x$的圖形上
   $\Leftrightarrow s = a^r$
   $\Leftrightarrow r = \log_a s$
   $\Leftrightarrow$ 點$Q(s, r)$在$y = \log_a x$的圖形上
   而點$P(r, s)$與$Q(s, r)$對稱於直線$y = x$，
   因此$y = a^x$的圖形與$y = \log_a x$的圖形對稱於直線$L: y = x$。
2. 圖形都為連續，兩者對稱於直線$y = x$，
   且$y = a^x$圖形恆過點$(0,1)$，$y = \log_a x$圖形恆過點$(1,0)$。
3. (1) 當$a > 1$時，都是嚴格遞增，
   也就是若$x_1 > x_2$時，則$a^{x_1} > a^{x_2}$；若$x_1 > x_2 > 0$時，則$\log_a x_1 > \log_a x_2$。
   (2) 當$0 < a < 1$時，都是嚴格遞減，
   也就是若$x_1 > x_2$時，則$a^{x_1} < a^{x_2}$；若$x_1 > x_2 > 0$時，則$\log_a x_1 < \log_a x_2$。

24