◎3-4 二階方陣表示的線性變換

【目標】

首先能理解平面上的四種基本的幾何變換，包括：旋轉、鏡射、伸縮與推移等四種變換的意涵及其二階方陣的表示。再者，能理解平面上的線性變換的意義，以及線性變換的二階方陣表示；進而能理解平面上的線性變換能將直線變換成直線的性質，以及線性變換下面積的變化率。

【討論】

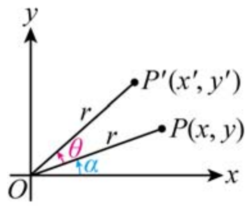
近年來由於電腦科技的進步，電腦動畫的發展也是一日千里。它能讓年輕人喜愛，甚至著迷，優質的音效固然功不可沒，但主要還是生動逼真並具立體感的3D畫面，令人愛不釋手。電腦繪圖的原理。應用了許多數學知識。首先，整個電腦螢幕被作為一個坐標平面。當顯示靜態畫面時，只要在預定的坐標打上各種顏色的光點，即呈現所需圖案；但要展現動態畫面時，便須逐次變換圖案的位置、角度及大小，這就牽涉到平面變換的概念。基本的平面變換大致有平移、旋轉、鏡射、伸縮、推移等五種，其中平移的概念比較簡單，而後四者屬於線性變換，都可以用二階方陣表示。

1. 旋轉：

在坐標平面上，

設將點 $P(x,\ y)$ 以原點為中心旋轉 θ 得點 $P'(x',\ y')$，

且 $x = r\cos\alpha,\ y = r\sin\alpha$，其中 $r > 0$，如圖，



則

$x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta$，

$y' = r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta = y\cos\theta + x\sin\theta$。

得到 $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$，

即 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$。

因此，點 $P(x,\ y)$ 的坐標以矩陣 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 表示，

在其左邊乘上二階方陣 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，

設所得矩陣為 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$，

則 $P'(x',\ y')$ 就是將點 $P(x,\ y)$ 以原點為中心旋轉 θ 所得的點，

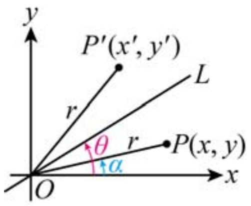
而 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 稱為旋轉矩陣。

2. 鏡射：

在坐標平面上，設L是廣義角θ終邊所在的直線，

點$P(x,\ y)$對直線L鏡射得點$P'(x',\ y')$(即L垂直平分$\overline{PP'}$)，

令$x=r\cos\alpha,\ y=r\sin\alpha$，其中$r>0$，如圖，



則點P'在廣義角$\theta+(\theta-\alpha)=2\theta-\alpha$的終邊上，

於是

$x'=r\cos(2\theta-\alpha)=r\cos2\theta\cos\alpha+r\sin2\theta\sin\alpha=x\cos2\theta+y\sin2\theta$，

$y'=r\sin(2\theta-\alpha)=r\sin2\theta\cos\alpha-r\cos2\theta\sin\alpha=x\sin2\theta-y\cos2\theta$，

得到$\begin{cases}x'=x\cos2\theta+y\sin2\theta\\ y'=x\sin2\theta-y\cos2\theta\end{cases}$，即$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$。

習慣上，我們常取鏡射軸L的廣義角為$\dfrac{\theta}{2}$。

於是，點$P(x,\ y)$的坐標以$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$表示，

在其左邊乘上$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$，

設所得的矩陣為$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$，

即$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，

則$P'(x',\ y')$就是將點$P(x,\ y)$對直線$L:y=x\tan\dfrac{\theta}{2}$鏡射所得的點，

而$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$稱為鏡射矩陣。

由於

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},$$

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}。$$

當考慮鏡射軸為$y=mx$時，可取斜率$m=\tan\dfrac{\theta}{2}$，

於是在鏡射矩陣$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$中，

$\cos\theta=\dfrac{1-m^2}{1+m^2},\ \sin\theta=\dfrac{2m}{1+m^2}$。

3. 伸縮：

在坐標平面上，

設點 $P(x,\ y)$ 的x坐標伸縮r倍($r>0$)、y坐標伸縮s倍($s>0$)，

得到點 $P'(x',\ y')$，即 $x'=rx,\ y'=sy$，

於是$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} rx \\ sy \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$。

換言之，

點 $P(x,\ y)$ 的坐標以$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$表示，在其左邊乘上$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$，

設所得的矩陣為$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$，

則 $P'(x',\ y')$ 是將點 $P(x,\ y)$ 的x坐標、y坐標分別伸縮r倍、s倍得到的點，

而$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$稱為伸縮矩陣。

特別地，

伸縮矩陣$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$只將$x$坐標伸縮$r$倍，$y$坐標不變；

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$只將$y$坐標伸縮$s$倍、$x$坐標不變；

而$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$將$x$坐標、$y$坐標都伸縮$r$倍，

也可稱$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$將點 $P(x,\ y)$ 伸縮r倍。

4. 推移：

在坐標平面上，將點 $P(x,\ y)$ 變換成點 $P'(x',\ y')$，其中$\begin{cases} x'=x+ry \\ y'=y \end{cases}$，

以矩陣表示，則為$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$。

此變換是將點 $P(x,\ y)$ 沿x軸方向推移y坐標的r倍，而得點 $P'(x',\ y')$；

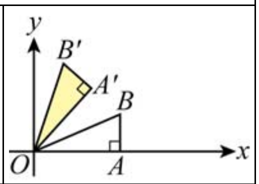
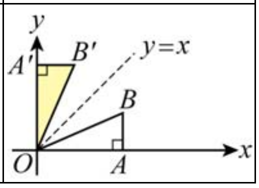
另一方面，若將點 $P(x,\ y)$ 沿y軸方向推移x坐標的s倍，得點 $P'(x',\ y')$，

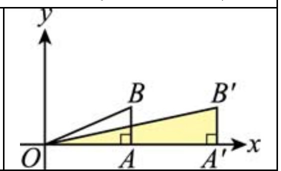
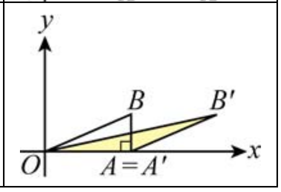
則$\begin{cases} x'=x \\ y'=sx+y \end{cases}$，

或以矩陣表為$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$。

二階方陣$\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$及$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$都稱為推移矩陣。

5. 以上介紹的四種變換，旋轉、鏡射、伸縮、推移，
都把一點 P 變換到一點 P' (原點 O 經變換仍為原點 O)。
因此，這些變換會把一個圖形 G(點集合)變換成某個圖形 G' 。
本節將會說明它們
把直線變換成直線、線段變換成線段、三角形變換成三角形。
茲將這四種變換整理成下表：

變換	矩陣表示	作用	圖例（$\triangle OAB$ 變換成$\triangle OA'B'$）	
旋轉	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$	以原點為中心 旋轉 θ	$\begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}$	
鏡射	$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$	對直線 $y = x\tan\dfrac{\theta}{2}$ 作鏡射	$\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ \end{bmatrix}$	

變換	矩陣表示	作用	圖例（$\triangle OAB$ 變換成$\triangle OA'B'$）	
伸縮	$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$	x 坐標伸縮 r 倍、 y 坐標伸縮 s 倍	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
推移	$\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	沿 x 軸方向推移 y 坐標的 r 倍	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$	沿 y 軸方向推移 x 坐標的 s 倍		

之前所介紹的旋轉、鏡射、伸縮、推移，
將點 $P(x,\ y)$ 變換成點 $P'(x',\ y')$ 時，
$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ 與 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的關係都形如：
$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 。
一般而言，
設 $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ 是四個任意常數，
在坐標平面，
將每一點 $P(x,\ y)$ 依上述等式映射到點 $P'(x',\ y')$ 的變換稱為線性變換。
因此，旋轉、鏡射、伸縮、推移都是線性變換。
當一線性變換將點 $(x,\ y)$ 映射到點 $(x',\ y') = (a_1x + b_1y,\ a_2x + b_2y)$ ，
即 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ，
此時，稱該線性變換以二階方陣 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ 表示。

例如 $(x',\ y')=(2x+y,\ 3x-4y)$ 時，$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，

即線性變換以 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ 表示。

當線性變換以二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ 表示時，也稱該線性變換為 A，

此時，$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$。

反之，當線性變化以某二階方陣 A 表示，且滿足 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$，

於是，

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})=xA\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+yA\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=x\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1x+b_1y \\ a_2x+b_2y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

故 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$。

【性質】

1. 線性變換以二階方陣表示：
   設A是平面上的線性變換，
   則 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ 的充要條件為 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ 且 $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$。

2. 在矩陣 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 左方乘上下列矩陣得到 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ 時，可將點 $P(x,\ y)$ 變換成點 $P'(x',\ y')$。
   (1)旋轉矩陣 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$：以原點為中心旋轉 θ。
   (2)鏡射矩陣 $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$：對直線 $y=x\tan\dfrac{\theta}{2}$ 作鏡射。
   (3)伸縮矩陣 $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$：$x$ 坐標伸縮 r 倍、y 坐標伸縮 s 倍。
   (4)推移矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$：沿 x 軸方向推移 y 坐標的 r 倍。
   $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$：沿 y 軸方向推移 x 坐標的 s 倍。

3. 二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ 將點 $(x,\ y)$ 映射到點 $(x',\ y')$ 時，
   $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，即 $(x',\ y')=(a_1x+b_1y,\ a_2x+b_2y)$。

4. 設 A 是線性變換，則 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ 的充要條件為 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ 且 $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$。

【討論】

1. 在之前例中，

一條給定的直線 L 經一個給定的線性變換 A 變換後的圖形仍是直線。

一般而言，

只要 A 的行列式不為 0，

線性變換 A 就會將直線變換成直線，

說明如下：

設 $P_1(x_1,\ y_1),\ P_2(x_2,\ y_2)$ 是直線 L 上相異兩點，

則 L 的參數式為 $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$，

亦可表為 $\begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2 \\ y = (1-t)y_1 + ty_2 \end{cases}$，

以矩陣表示則為 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1-t)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$，其中 t 是參數。

若線性變換 A 的行列式不為 0，

且 A 將相異點 $P_1(x_1,\ y_1),\ P_2(x_2,\ y_2)$ 分別變換成點 $P_1'(x_1',\ y_1'),\ P_2'(x_2',\ y_2')$，

則 $P_1',\ P_2'$ 是相異點。

此時，

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A((1-t)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}) = (1-t)A\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + tA\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = (1-t)\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \end{bmatrix},$$

所以 A 將直線 P_1P_2（即 L）變換成直線 $P_1'P_2'$。

若在上述參數式中取 $0 \le t \le 1$，

則可見 A 將線段 $\overline{P_1P_2}$ 變換成線段 $\overline{P_1'P_2'}$。

在坐標平面上，

若二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ 滿足 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$，

則以 A 作線性變換時，

頂點為 $(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 1)$ 的單位正方形

被 A 映射成頂點為 $(0,\ 0),\ (a_1,\ a_2),\ (a_1+b_1,\ a_2+b_2),\ (b_1,\ b_2)$ 的平行四邊形，

亦即由向量 $\overrightarrow{a} = (a_1,\ a_2),\ \overrightarrow{b} = (b_1,\ b_2)$ 所張開的平行四邊形，

其面積為 $|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}|$。

因此，以 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ 作線性變換的面積變化率為 $|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}|$。

【性質】

1. 線性變換的面積變化率：

坐標平面上，以二階方陣$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$作線性變換，

當$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$時，其面積變化率為$|\Delta|$。

設線性變換$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$的行列式$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$，

由於A將線段變換成線段，

故將n邊形變換成n邊形，

而任意多邊形經變換後的面積也是原來的$|\Delta|$倍。

事實上，平面上的任何有界區域的面積變化率恆為$|\Delta|$。

由於

$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，

$\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix} = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1$，

故旋轉及鏡射的面積變換率都是 1。

其實，旋轉及鏡射都將線段變換成等長的線段，

也就將三角形變換成全等的三角形(SSS全等性質)，

所以任意圖形經變換後，都不改變其形狀及大小。

又$r > 0,\ s > 0$時，$\begin{vmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} = rs > 0$，

故伸縮$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$的面積變化率為$rs$；

而推移$\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$及$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$的面積變化率為$|1-0| = 1$。

伸縮可能改變圖形的形狀及大小；

推移則可能改變圖形的形狀，但不改變面積。

【性質】

1. 設$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$，則$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$的充要條件為$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$。

【性質】

二階方陣所對應的平面變換：

以下四種基本的線性變換是針對點的平移、旋轉、伸縮、對稱

1. 旋轉：（保持形狀與大小）

點 $P(x,y)$ 以原點為中心旋轉 θ 角後得點 $P'(x',y')$，

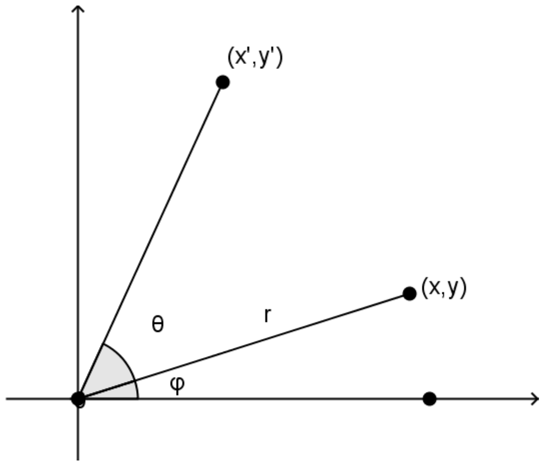
則 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，

稱矩陣 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 為旋轉矩陣。

幾何意義：

點 $P(x,y)$ 的輻角 φ 旋轉 θ 角得點 $P'(x',y')$ 輻角的 $\theta+\varphi$，長度不變，

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta = \sqrt{x^2+y^2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\theta - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\theta\right) = \sqrt{x^2+y^2}\cos(\theta+\varphi) \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta = \sqrt{x^2+y^2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\theta + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\theta\right) = \sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta+\varphi) \end{cases}$$



說明：

$x'+iy' = r\cos(\theta+\varphi) + ir\sin(\theta+\varphi)$

$= (r\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi) + i(r\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\sin\varphi)$

$= (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$，

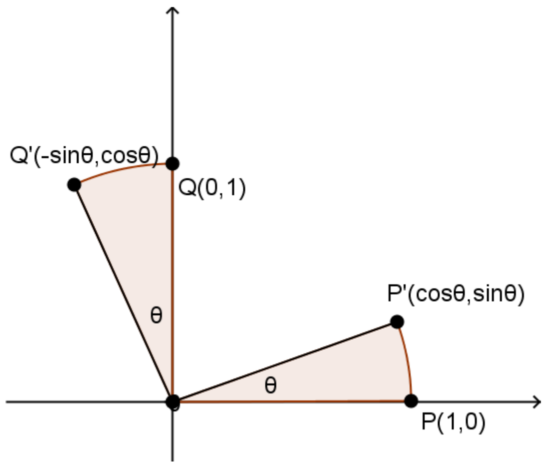
即 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$。

或想成將 $(1,0),(0,1)$ 變成 $(\cos\theta,\sin\theta),(-\sin\theta,\cos\theta)$，

且線性變換 $T((x,y)) = AX$，

故 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$，

$T((x,y)) = T(x(1,0) + y(0,1)) = xT((1,0)) + yT((0,1)) = x\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$，



若 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ 表旋轉(圖形)變換，

在複數平面上的意義為將點 $P(x+iy)$ 繞原點旋轉 θ 角，

得到 $P'(x'+iy')$，即 $x'+iy'=(x+iy)(\cos\theta+i\sin\theta)$，

則 $A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{bmatrix}$ 逆變換，即將圖形旋轉 $-\theta$ 角。

2. 鏡射：(保持形狀與大小)

假設 L 是與 x 軸夾角為 θ 的直線，

若點 $P(x,y)$ 對直線 L 鏡射後得點 $P'(x',y')$，

則 $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$。

想法：

$x'+iy'=r\cos(2\theta-\alpha)+ir\sin(2\theta-\alpha)$

$=(r\cos 2\theta\cos\alpha+r\sin 2\theta\sin\alpha)+i(r\sin 2\theta\cos\alpha-r\cos 2\theta\sin\alpha)$

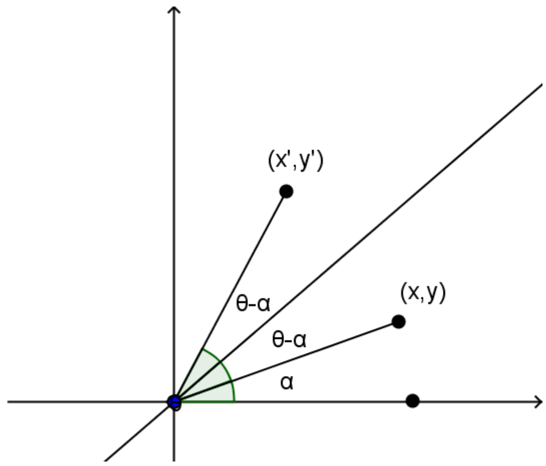
$=(x\cos 2\theta+y\sin 2\theta)+i(x\sin 2\theta-y\cos 2\theta)$，

即 $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$。

或將變換分解成為兩步驟如下

$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

幾何意義如下圖形：



【性質】

假設旋轉方陣 $A(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，鏡射方陣 $B(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$，則

1. $|A(\theta)|=1$ 且 $(A(\theta))^{-1}=(A(\theta))^T$。

   $((A(\theta))^{-1}=\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$(表圖形旋轉 $(-\theta)$ 角))
2. $A(\alpha)A(\beta)=A(\alpha+\beta)=A(\beta)A(\alpha)$
3. $A(\theta)^n=A(n\theta)$
4. $|B(\theta)|=-1$ 且 $(B(\theta))^{-1}=(B(\theta))^T$
5. $B(\alpha)B(\beta)=A(\alpha-\beta)$
6. $A(\alpha)B(\beta)=B(\alpha+\beta)$
7. $B(\beta)A(\alpha)=B(\beta-\alpha)$

【問題】

1. 試說明

   $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

   等的線性變換涵義
2. 試說明 $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

   等的線性變換涵義。
3. 試寫出對於 x 軸的鏡射矩陣。

   (解：$\begin{bmatrix}\cos(2\times 0) & \sin(2\times 0)\\ \sin(2\times 0) & -\cos(2\times 0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$)
4. 試寫出對於 y 軸的鏡射矩陣。

   (解：$\begin{bmatrix}\cos(2\times\frac{\pi}{2}) & \sin(2\times\frac{\pi}{2})\\ \sin(2\times\frac{\pi}{2}) & -\cos(2\times\frac{\pi}{2})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$)
5. 試寫出對於直線 $L:y=x$ 的鏡射矩陣。

   (解：$\begin{bmatrix}\cos(2\times\frac{\pi}{4}) & \sin(2\times\frac{\pi}{4})\\ \sin(2\times\frac{\pi}{4}) & -\cos(2\times\frac{\pi}{4})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$)
6. 試寫出對於直線 $L:y=mx$ 的鏡射矩陣。

   (解：$\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} & \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\\ \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} & -\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2}\\ \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2}\end{bmatrix}$)

7. 試寫出點 $P(x,y)$ 和對於直線 $L: ax+by+c=0(a^2+b^2\neq 0)$ 的鏡射點 $P_1(x',y')$ 之間的關係。

(解：$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2} & \dfrac{-2ab}{a^2+b^2} \\ \dfrac{-2ab}{a^2+b^2} & \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$)

8. 設 L_1 與 L_2 的交角為 θ，點 $P(x,y)$ 對於 L_1 的對稱點 $P_1(x',y')$，$P_1(x',y')$ 對於 L_2 的對稱點 $P_2(x'',y'')$，試找出 $P(x,y)$ 與 $P_2(x'',y'')$ 的關係。

(提示：兩次對稱等於一次旋轉)

(解：$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$)

9. 設 $A=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}(a\neq 0)$，試證明 $A^n=\begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$。

【定義】

1. 對稱方陣：
   若 $a_{ij}=a_{ji}$ 者稱之。
2. 反對稱方陣：
   若 $a_{ij}=-a_{ji}$ 者稱之。
3. 上三角矩陣：
   若 $a_{ij}=0,\forall i>j$ 者稱之。
4. 下三角矩陣：
   若 $a_{ij}=0,\forall i<j$ 者稱之。
5. 列矩陣：
   只有一列的矩陣，$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$。
6. 行矩陣：
   只有一行的矩陣，$A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$。
7. 對稱矩陣：
   如果一個矩陣滿足 $a_{ij}=a_{ji}$，稱此矩陣為對稱矩陣。
8. 對角線矩陣：
   如果一個方陣中除了對角線上的元不為零外，其餘都是零者稱之，對角線其餘的元可以為零或非零實數，即 $a_{ij}=\begin{cases} 0 & ,\text{當} i\neq j \\ \text{實數} & ,\text{當} i=j \end{cases}$。
9. 行矩陣的轉置矩陣為列矩陣，列矩陣的轉置矩陣為行矩陣。

【問題】

1. 對角線矩陣有何優點？

【應用】

1. 對角化(diagonalization)：

設 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$，則 $\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 1\\ 4 & 1-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)$

為特徵方程式(characteristic polynomial of A)，

特徵根(eigenvalue)為 3,–1，

(1) 對 $\lambda_1=3$ 時，$(A-\lambda_1 I)=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$，

若 $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x_1+x_2\\ 4x_1-2x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$，則解為 $x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=t\vec{v}_1, t\neq 0$。

(2) 對 $\lambda_2=-1$ 時，$(A-\lambda_2 I)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$，

若 $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1+x_2\\ 4x_1+2x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$，則解為 $x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}=t\vec{v}_2, t\neq 0$。

取 $Q=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}=[\vec{v}_1,\vec{v}_2]$，則 $Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 為對角化矩陣。

2. 設 $Q=[\vec{v}_1,\vec{v}_2], D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$，並希望 $A=QDQ^{-1}\Rightarrow Q^{-1}AQ=D\Rightarrow AQ=QD$，

即

$$AQ=A[\vec{v}_1\quad \vec{v}_2]=[A\vec{v}_1\quad A\vec{v}_2]=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 6 & 2\end{bmatrix}=[\lambda_1\vec{v}_1\quad \lambda_2\vec{v}_2]=[\vec{v}_1\quad \vec{v}_2]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}=QD$$

$$\Rightarrow[A\vec{v}_1\quad A\vec{v}_2]=[\lambda_1\vec{v}_1\quad \lambda_2\vec{v}_2]\Rightarrow[(A-\lambda_1 I)\vec{v}_1\quad (A-\lambda_2 I)\vec{v}_2]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=O$$

$$\Rightarrow[A-\lambda_1 I\quad A-\lambda_2 I][\vec{v}_1\quad \vec{v}_2]=O\Rightarrow\begin{cases}(A-\lambda_1 I)\vec{v}_1=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\\ (A-\lambda_2 I)\vec{v}_2=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\end{cases}$$

當 $\det(A-\lambda I)=0$ 時，才能取到 $\vec{v}_1\neq\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},\vec{v}_2\neq\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ 之解，

故取滿足 $\det(A-\lambda I)=0$ 之 λ 即可，

再代回去解 $\vec{v}_1\neq\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},\vec{v}_2\neq\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det(A-\lambda I)=0$ 之解即為 λ_1,λ_2

此時 $A=QDQ^{-1}\Rightarrow Q^{-1}AQ=D\Rightarrow AQ=QD$，

求 $A^k=(QDQ^{-1})(QDQ^{-1})\cdots(QDQ^{-1})=QD^kQ^{-1}$，

並可以求 $\lim_{k\to\infty}A^k$ 之極限矩陣。

3. 設$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$，則$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda&1&0\\0&2-\lambda&2\\0&0&3-\lambda\end{bmatrix}$

$=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$為特徵方程式，特徵根為$1,2,3$，

(1) 對$\lambda_1=1$時，$(A-\lambda_1 I)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&2\\0&0&2\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，

若$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&2\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\x_2+2x_3\\2x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，則解為$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=t\vec{v}_1, t\neq 0$。

(2) 對$\lambda_2=2$時，$(A-\lambda_2 I)=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&0&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，

若$\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&0&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1+x_2\\2x_3\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，則解為$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=t\vec{v}_2, t\neq 0$。

(3) 對$\lambda_3=3$時，$(A-\lambda_3 I)=\begin{bmatrix}-2&1&0\\0&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，

若$\begin{bmatrix}-2&1&0\\0&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x_1+x_2\\-x_2+2x_3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，則解為$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=t\vec{v}_3, t\neq 0$。

取$Q=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}=[\vec{v}_1\quad \vec{v}_2\quad \vec{v}_3]$，則$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$為對角化矩陣

(即$AQ=A[\vec{v}_1\quad \vec{v}_2\quad \vec{v}_3]=[A\vec{v}_1\quad A\vec{v}_2\quad A\vec{v}_3]=[\lambda_1\vec{v}_1\quad \lambda_2\vec{v}_2\quad \lambda_3\vec{v}_3]$

$=[\vec{v}_1\quad \vec{v}_2\quad \vec{v}_3]\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}=QD\Rightarrow AQ=QD\Rightarrow A=Q^{-1}DQ$)

此時若要求$A^k=(QDQ^{-1})(QDQ^{-1})\cdots(QDQ^{-1})=QD^kQ^{-1}$，

可以簡化計算，並可以求$\lim\limits_{k\to\infty}A^k$之極限矩陣。

1. 反矩陣：

設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，且 $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$，

則 $A^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$。

2. 反矩陣：

設 $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，則 $A^{-1}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$。