數學妖法 **Mathematical Sorcery** - Revealing the Secrets of Numbers

心得 - 楊涵傑

書名：數學妖法 Mathematical Sorcery

作者：Calvin C. Clawson

心得：

剛看到這本書，翻了翻最前面幾章，感覺像是看過許多次卻從來沒怎麼記起來的，數字體系的建立（我能接受的科學史，大概僅止於科學家傳記？），這幾乎讓我想先暫時放棄閱讀這本書，晚點再來鑽研這頭痛的歷史故事，也許先讀讀哈利波特吧！不過稍微瀏覽過後面的章節後，我想應該還是有不少我比較有興趣的部分。

也許是從小便玩電腦上的數學遊戲，讓我很熟悉數學的娛樂性，直到長大，漸漸演變爲思考性解題的喜悅。是的，思考的樂趣。能體驗思考的樂趣，能感受解決難題的感動，我想可以說是唸好數學的充要條件吧。否則，至少可以享受數學，我想那也很不錯了。因此，誠如作者於楔子提及，一個好的數學老師必須具有對數學的熱誠，好的數學老師所要傳承的，除了數學知識與技巧，更重要的是對數學的熱愛，深入探知的精神甚至——慾望。

有時，我們便需要希臘人的精神，排除利益以及實用的因素，純爲學術上的好奇心，去探索數學（以及其他任何領域！），時常當我們如此做時，我們更能夠發現數學的美麗，以及其吸引人的地方。

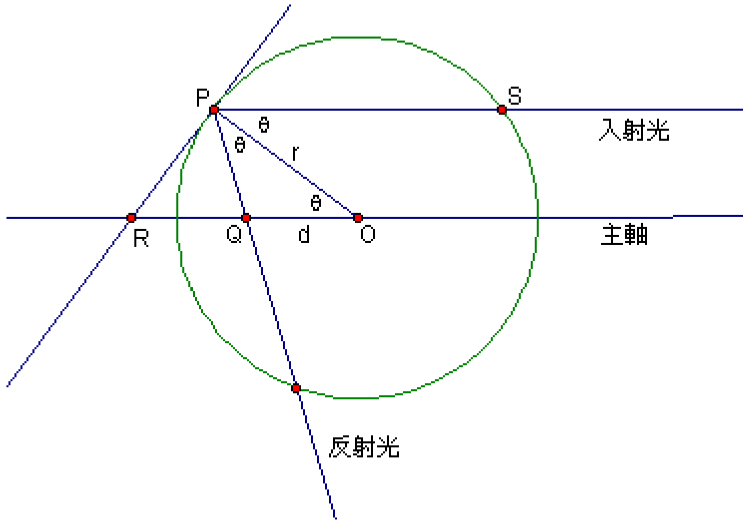
這本書的根本精神是如此，藉由介紹如此多奇妙的數學，圓錐曲線、華麗的無窮級數、微積分等，散播作者對數學的熱誠，期望引起讀者的興趣、激發其好奇心。此書中一些數學我仍陌生，例如「e」，以及「微分」，但仍然我喜歡一方面隨著作者的介紹閱讀下去，另一方面我喜歡自行進行證明以及推論，以獲得更多的樂趣，以及成就感。

於是，很快的，翻過前面數字起源的部分，而且對於第 28 頁巴比倫人的數字表示法中，1 和 60 的寫法爲何看起來完全相同感到十分不解。

接著作者講了有關希臘人如何奠定數學（幾何以及代數）基礎及黃金平均數等等。再來便提到了圓錐曲線。包括——平行光入射拋物面鏡將聚焦於一點，也就是其焦點。

這提醒我許多物理老師曾經教錯的一點，許多物理老師（包括我的！）告訴學生平行光入設「球面鏡」會聚焦於一點（是的，也有老師說是聚焦於一半焦距處）（甚至有許多老師要求學生證明看看，這不禁令我懷疑，老師自己是否曾經試著證明過），當然——也許有些老師只是說「大約」會，但相信那弄混了不少人。十分可笑，被告知時，我也深信不疑，當我一個同學告訴我根據他電腦繪圖的結果並不會聚焦於一點時，我甚至懷疑他繪圖的正確性，使他有點生氣。事實很快證明他是對的（我是錯的，顯然我當時應該用 GSP 自己畫畫看），當我某一天嘗試證明平行光入射球面鏡會聚焦於一點。（GSP Geometry Sketch Pad 是被廣泛使用的一種數學繪圖軟體）

我自己以鉛筆畫圖後（畫極端的情形，即入射於球面境邊緣），很快發現不應該聚焦於一點。幾分鐘後，我發現平行主軸的光入射球面鏡，反射後會與主軸交在鏡面和球面鏡球心之間，且若入射光與鏡面接觸點和主軸之連線與主軸之夾角爲 θ，會交於距離球心 $\frac{r\times\sec\theta}{2}$ 處。



說了這麼多，不如證明看看：

我們將球面鏡暫時看作其與入射光處於同一平面的剖面圖，並設球心爲 O，入射光射到球面鏡上 P 點。

由反射定率有入射光、法線（$\overline{OP}$）、反射光位於同一平面上，即反射光亦與主軸位於同一平面上，不妨設其與主軸交於 Q 點。

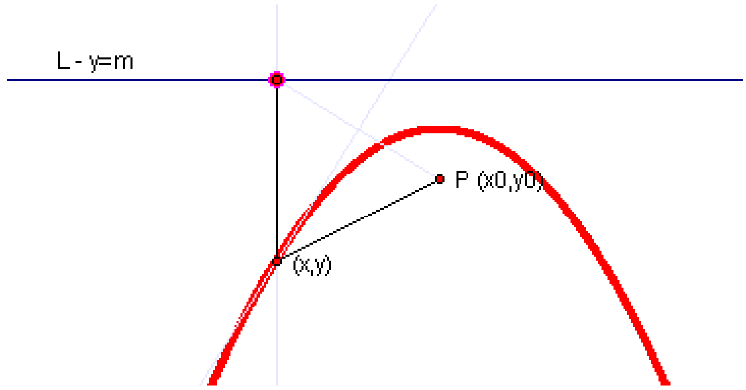
由於入射光平行主軸，由反射定率知入射角等於反射角，即$\angle SPO=\angle OPQ$，又由$\overline{PS}//\overline{OQ}$知$\angle SPO=\angle POQ$，不妨設$\angle SPO=\angle OPQ=\angle POQ=\theta$。

過 P 點作圓 O 切線，設交主軸於 R 點。由於$\angle OPQ=\angle POQ$，可知 Q 在$\overline{OP}$中垂線上，又ΔOPR爲直角三角形，故 Q 爲ΔOPR外心，$\overline{RQ}=\overline{OQ}$。設$\overline{RQ}=\overline{OQ}$=d。

於是我們有 d=$\dfrac{\overline{OR}}{2}=\dfrac{r\times\sec\theta}{2}$。

顯然平行主軸入射光與主軸（注意主軸本身可以當作一條入射光以及其重合的反射光）的交點隨θ角而不同，故對於球面鏡，平行主軸的入射光反射後並不會交於一點。
證明這題也許不需要很繁複的證明技巧，但告訴了我們懷疑的重要，並讓我體會了自己驗證一些定理、公式、題目的可獲得的意外收穫。

接著我開始嘗試證明拋物面鏡爲何可以聚焦一點，以及此點是哪一點。但開始我發現我對拋物線仍不夠熟悉，決定暫時先放棄。我卻想到了拋物線的定義：平面上一點 P 及一直線 L，所有與直線 L 距離和點 P 距離相等的點的集合。於是我決定先證明看看以這種定義可以導出目前大家所知的拋物線一般式：ax^2+bx+c。



設 P 點座標爲(x_0,y_0)，L 的直線方程式爲 y=m，由拋物線上任一點(x,y)至 P 點及直線 L 距離相等有：

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(y-m)^2$$

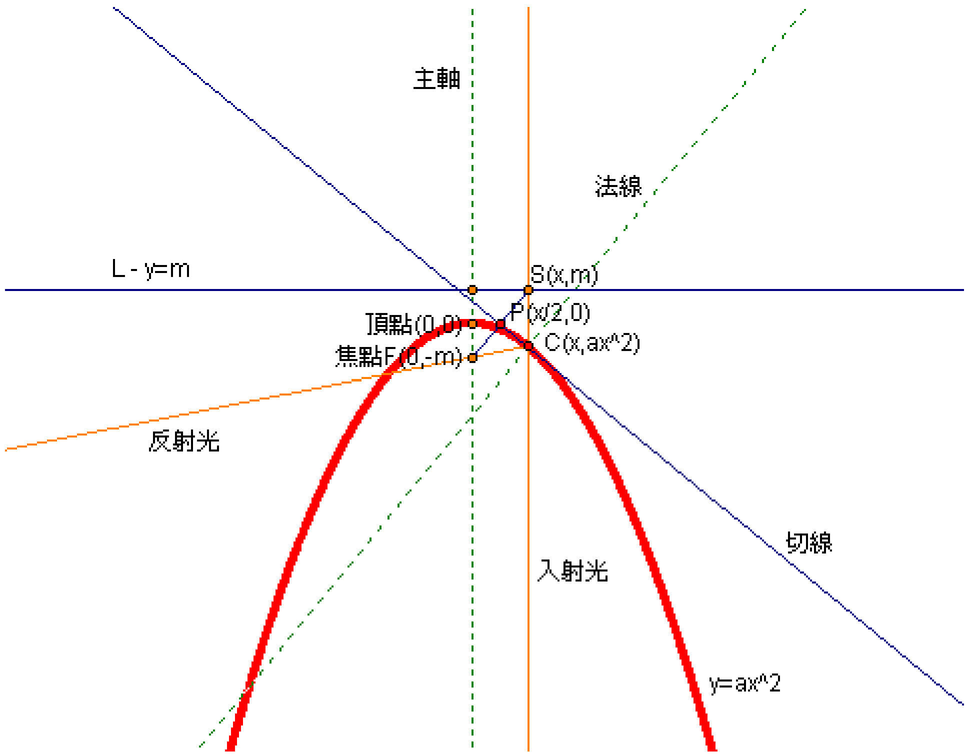
$$\Rightarrow 2y(m-y_0)=-x^2+2x_0x+(m^2-x_0^2-y_0^2)$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2y_0-2m}x^2+\frac{x_0}{m-y_0}x+\frac{x_0^2+y_0^2-m^2}{2y_0-2m}$$

x_0、y_0、m 三個數，顯然可以使$\frac{1}{2y_0-2m}$、$\frac{x_0}{m-y_0}$、$\frac{x_0^2+y_0^2-m^2}{2y_0-2m}$成爲任意值，不妨設$\frac{1}{2y_0-2m}=a$，$\frac{x_0}{m-y_0}=b$，$\frac{x_0^2+y_0^2-m^2}{2y_0-2m}=c$，即有：

$$y=ax^2+bx+c$$

於是這便是我們一向熟悉的拋物線一般式子。證明完之後，一個靈感忽然跑來，讓我猜想——也許這 P 點便是拋物線的焦點？利用 GSP 初步驗證後（GSP 真好用），這樣的猜想很可能是對的，於是不如從定義證明吧。



首先，設我們的拋物面鏡是個 $y=ax^2$ 的拋物線，由於只須考慮其不同形狀，爲了使題目單純化，將後面的 x 項與常數項省略並不影響。其頂點是(0,0)，其上任一點的座標爲(x_0,ax_0^2)。我們設拋物線上任一點到直線 L: y=m 和 F(0,-m)點的距離相同。

我們先證明對於拋物線上一點 C，其切線便是 C 點在直線 L 上的投影 S 點，與焦點 F 連線的中垂線。

求原拋物線 $y=ax^2$ 的導數得到 y’=2ax，即對於拋物線上一點 $C(x_0,ax_0^2)$，其切線的方程式爲 $y=2ax_0$。

$\overline{SF}$ 中點 P 的座標爲($\frac{x_0+0}{2},\frac{m-m}{2}$)=($\frac{x_0}{2}$,0)，又 C 點座標爲($x_0$,$ax_0^2$)，故得$\overleftrightarrow{CP}$的方程式爲 y=2$ax_0$。$\overleftrightarrow{CP}$爲拋物線 y=$ax^2$ 過 C 點的切線。

由拋物線基本定義我們知道$\overline{CF}=\overline{CS}$，又$\overleftrightarrow{CP}$垂直平分$\overline{SF}$，故$\angle FCP=\angle SCP$。

現在可設平行主軸的入射光射向拋物面鏡上任一點 C 點，延長入射光與直線 L 交於 S 點。由光反射的定律可知入射光與切線$\overleftrightarrow{CP}$夾角=反射光與切線$\overleftrightarrow{CP}$夾角。又由於$\angle SCP$是入射光與切線夾角的對頂角，有入射光與切線$\overleftrightarrow{CP}$夾角=$\angle SCP$，於是反射光與切線$\overleftrightarrow{CP}$夾角=$\angle SCP$。

注意到$\angle FCP$也等於$\angle SCP$，因此我可以得知 F 點位於反射光上，無論 C 點座標爲何。因此所有平行主軸的入射光必相交於 F 點。此 F 點即拋物線焦點，亦是定義中「拋物線上任一點至一直線和一點的距離相等」的那一點。

就這麼，有關平行光入射拋物線面鏡如何聚焦於一點，以及其聚焦性質與拋物線本身定義的關係，我永遠不會忘了。作者也講了其他二種較不熟悉圓錐曲線——橢圓和雙曲線，在此就算是認識過了。

接著作者介紹了演繹法（三段推理），以及如何用演繹的方式建立數字及幾何體系，這部分正說明了數學體系建立的嚴謹，也十分令人不可思議這麼如今宏偉的數學體系是由少數幾條公理（和公設）推演而來的。不過最後哥德不完備定理並不完全搞的清楚就是了。

第五章作者帶我們踏進無窮級數的大門，介紹了很多的無窮級數以及它們的和。第 162 頁的式子使我眼睛一亮：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)}=\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

有鑑於學校開出的書單有一本「黃金比例」，我還沒看，我爸倒是先拿去翻了翻。我一向對黃金比例感到有點不屑，因爲那聽起來只不過是數學家由「(x+1):x=x:1」的定義導出了某個特定的數Φ，再到自然界中到處尋找他的蹤跡，那麼 1 這個數不是更妙嗎？我相信兩段相關線段幾乎等長的例子一定更多（當然我相信我現在改觀了）。當我爸跟我說：「嘿，費氏數列後項比前項的比值會區近黃金比例Φ」時，我感到有點驚訝，也十分有興趣。而這書竟也提到了這個性質。馬上，我試著用費氏數列前幾項驗證，看是否真的趨近Φ。

1÷1=1，2÷1=2，3÷2=1.5，5÷3=1.$\dot{6}$，8÷5=1.6，13÷8=1.625，21÷13=1.616…，34÷21=1.619…

很快的我發現，費氏數列後項與前項的比值的確不斷的往Φ逼近。當然這引起了我的好奇心，於是我決定提筆證明。（此時我已看完此書中無窮簡單連分數的部分，正有靈感）

首先，我們設費氏數列第 n 項的值爲 F(n)，由費氏數列基本定義有：

F(n)+F(n+1)=F(n+2)

於是：

$$\frac{F(n)}{F(n+1)}=\frac{1}{\frac{F(n+1)}{F(n)}}=\frac{1}{1+\frac{F(n-1)}{F(n)}}$$

利用這個公式，我們可以得到：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{F(n-1)+F(n)}{F(n)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{F(n-1)}{F(n)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+\frac{F(n-2)}{F(n-1)}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}\right)$$

由於我們假設是 n 趨近無窮大時，因此這樣的過程可以永無止盡的繼續重複下去。成爲熟悉的——簡單無窮連分數[1;$\dot{1}$]！

設 x=[1;$\dot{1}$]，很容易我們有$\frac{1}{x-1}=x$，解得 x=$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\Phi$。得證了！

不過當我興奮的跟我爸講時，我爸卻說「黃金比例」一書中也證明了（而且查看後發現是完全一樣的方法），讓我感到有些掃興，不過還是很高興自己證出了這個等式。

作者繼續介紹了不少級數和，比較容易的便跟著證明，例如萊布尼茲算出的三角形數倒數級數和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\dots=2$$

我們可以將其除以 2，得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}\div 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\dots=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=1\times 2=2$$

得證。

然而雖然有些級數和的計算是分容易，但我對於含有「e」和「π」的等式實在百思不解。誠如作者所說：「這正是數學迷人之處，」不過要證明這些等式，感覺時再不容易。於是對於這些奇妙的級數和，大多便就瀏覽過，僅此而已。

在接下來的幾章，作者介紹了不少函數圖形，包括函數圖形的平移、旋轉（困難！）、極座標，也介紹了非歐幾何（黎曼幾何）以及矩陣。有許多我都較不熟悉，大多也就只是稍微了解。直到「樂在無窮」一章，無窮簡單連分數引起了我不小的興趣。（也許是因爲許多書上的腦筋急轉彎總是喜歡考你一個無窮連分數的値的緣故？）

對於作者說明「所有代數數中的無理數都有且僅有一種獨一無二的無窮簡單連分數表示法」感到頗爲好奇，正好作者舉了一些數的平方根爲例子，我想不妨探討看看正整數正平方根的無窮簡單連分數表示法有何規律。

不幸的式，當我計算到 13 的算術根時，便已碰到一些困難，由於最近正好也在練習 Turbo C 程式的撰寫，讓我絕定求助於電腦。

首先我寫了個程式（參見附錄：CONTFRAC.CPP），可以計算循環位數至多五位的無窮簡單連分數。然而很快我發現規律並不容易找，不斷的猜測也不斷的落空，終於我決定放棄這個程式。突然我想到何不直接撰寫一個程式，可以將輸入的數值以簡單連分數的型態表示？以下稍微介紹我想到的換算方式：

設我們輸入的數爲 x。

設 x=$k+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d\ldots}}}}$，其中 k,a,b,c,d…∈N。

顯然$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d\ldots}}}}$<1，因此 x 無條件捨去取整數就等於 k。此時我們知道 x 和 k 的值。

x–k=$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d\ldots}}}}$，於是有$\frac{1}{x-k}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d\ldots}}}$，即$\frac{1}{x-k}$無條件捨去取整數等於 a。

同理$\cfrac{1}{\frac{1}{x-k}-a}$無條件捨去取整數等於 b，$\cfrac{1}{\cfrac{1}{\frac{1}{x-k}-a}-b}$無條件捨去取整數等於 c……

於是我們發現，如此的計算有規律可循，可以設計成迴圈。如此便可以將輸入的數值以簡單連分數輸出。

利用這個程式（參見附錄：SIMPFRAC.CPP），再搭配「小算盤」的幫忙（爲了計算正整數的算數根），即可很容易的算出正整數算數根的無窮簡單連分數表示法（然而我懷疑在 SIMPFRAC.CPP 程式中，若輸入的值小數點後位數較多時，或要求準確率很高時，會由於程式資料儲存型別的最大儲存範圍導致不夠精確的情形發生）。（參見附錄：整數 1 至 36 之算數根的無窮簡單連分數表示法）

雖然有了程式的幫忙，我仍發現規律並不好尋找，更別說一般式了。我只能找到（也可以證明）以下規律（並不一般，只適用於特殊情形）：

規律一：設我們要求的是$\sqrt{n}$的無窮簡單連分數表示法（n∈N），而 k 是小於等於$\sqrt{n}$的最大整數，當 2k 可以被 n–k^2 整除時，$\sqrt{n}$=[k; $\dot{\frac{2k}{n-k^2}}$, $\dot{2k}$]。

規律二：設我們要求的是$\sqrt{n^2-2}$的無窮簡單連分數表示法（其中 n∈N, n≥3），我們有$\sqrt{n^2-2}$=[n-1; $\dot{1}$, n–2, 1, 2(n–1$\dot{)}$]

我的探討便止於此，雖然我相信還有許多值得深造的空間。

在最後面的幾章，作者漸漸把重心轉移到人類最輝煌的成就：微積分的部分。然而這部分我只能勉強跟著閱讀。我認爲作者對微積分的切入太快，若尚未接觸者實在很難看懂（「微積分的屠龍寶刀」一書會比較適合初學者看），因此我暫時也只能景仰這偉大的成就，沒辦法隨著作者攀上這宏麗的高塔了。

由於配合做了一些「功課」，這本書花了我幾天才看完。綜觀這本書，並不能算是一個很完善的教學系統，目的也不是傳授你任何特定的知識。作者只是處在這個許多人對數學興致缺缺的時代，想要透過對如今數學成就有系統的介紹，帶著讀者體會數學種種妙不可言的美，並且如果讀者願意，更能夠過作者的介紹，在特定的數學領域繼續深造。

我認爲現在社會上許多人缺乏自己下工夫的意願，鮮少有人了解數學要好，練習的重要性，而即便是練習，也涵蓋了各種不同的學習方式，不斷機械式的接受知識的灌輸絕對是不足的。當補習班漸漸攻佔這個社會，不少人透過補習班的填鴨教學被灌輸了各種公式、各種定理。當然有些人聽過便忘了，也有一些用功的傢伙能夠背的滾瓜爛熟，然而數學除了不斷做機械性的操作以增加自己的熟練度（可惜你永遠比不上電腦），更要培養敏銳的觀察力，以及各種思考技巧。敏銳的觀察力以及解題技巧通常只有在自己思考時獲得的最多。

爲什麼這麼多人數學參考數都翻爛了，數學成績仍然不見起色，我想我看過一些人，縱然所有需要的公式他都知道，碰上問題時卻不知如何使用，正如擁有工具卻不會操作的工人。一些人不願意自己下工夫思考，期待老師傳授他們各式題型的解法（於是碰到相同的問題，如果他們沒有不小心忘記，他們的確能夠解出來，而且可能比誰都快），殊不知數學領域是如此的廣大，正如牛頓對於貝殼以及真理海洋的比喻一般，老師只能給你工具，但他永遠不可能告訴你所有的問題。想想若數學的知識可以完全記載在一本教科書裡，或是可以讓「名師」三言兩語給道盡，那會是多無趣的！數學的樂趣其實正在於其廣大的範疇，不斷碰到不熟悉的問題，不斷應用現有的知識去解決他，當你腦中傳來「叮咚」的響鈴聲，那聲音是多麼的悅耳，多麼的令人感到愉快。

最後，我認爲有興趣從事數學科展的人，也不妨翻翻這本書，正由於這本書對各種美味的數學珍餚都只是淺嘗而已，有許多題材（例如連分數、無窮級數）便值得我們去探討、去品味。

用欣賞的眼光去看數學，你會發現他有多美麗；用挑戰的心態迎接數學，你會發現他有多有趣；全心投入數學，當數學本身（或一部份）也接納你時，你會發現——正忍不住露齒微笑、雀躍不已的自己。

（正文完）

附錄：CONTFRAC.CPP

計算型爲[x;x,x,x,x,x]（重複部分至多五位）的簡單無窮連分數。

```
/***** this is a programme that caculate limitless simple continued fractions *****/
/***** simple continued fraction written as [k;a,b,c,...]=k+1/[a+1/(b+1/c...)] *****/
/***** when a simple continued fraction repeats its denominator, we add a dot on the denominator, indicating its repetition *****/
/***** in the programme, simply type the number repeating without dot *****/
/***** number of repeating denominators: a maximum of 5 numbers is allowed *****/
#include <stdio.h>
double continuous(int, int, int, int, int, int, int);
const double one=1;
void main()
{
   int k, n, a=0, b=0, c=0, d=0, e=0;
   double contfrac;
   printf("\ninput denominators of a limitless simple continued fraction,");
   printf("\ninput in the form of [*;*,*,*,*,*]: ");
   /***** not all 5 denominators is necessary *****/
   scanf("%d;%d,%d,%d,%d,%d",&k, &a, &b, &c, &d, &e);
   printf("please insert an integer as a variation of accuracy: ");
   /***** the bigger n is the more accurate *****/
   scanf("%d",&n);
   contfrac=continuous(k,a,b,c,d,e,n);
   if(a==0){
      printf("%d = %lf", k, contfrac);
   }else if(b==0){
      printf("[%d; %d] = %lf", k, a, contfrac);
   }else if(c==0){
      printf("[%d; %d, %d] = %lf", k, a, b, contfrac);
   }else if(d==0){
      printf("[%d; %d, %d, %d] = %lf", k, a, b, c, contfrac);
   }else if(e==0){
      printf("[%d; %d, %d, %d, %d] = %lf", k, a, b, c, d, contfrac);
   }else{
      printf("[%d; %d, %d, %d, %d, %d] = %lf", k, a, b, c, d, e, contfrac);
   }
   printf("\nthe second power of contfrac is %lf", contfrac*contfrac);
}
```

```
double continuous(int k, int a, int b, int c, int d, int e, int n)
{
    int i, denonum, modnum=(a>0)+(b>0)+(c>0)+(d>0)+(e>0);
    /***** denonum for a,b,c,d,e: e-4,d-3,c-2,b-1,a-modnum *****/
    double deno, frac=0;
    for(i=1;;i++){
        denonum=modnum-(i%modnum);

deno=(denonum==modnum)*a+(denonum==1)*b+(denonum==2)*c+(denonum==3)*d+(denonum
==4)*e;
        frac+=deno;
        frac=one/frac;
        if(denonum==modnum&&i>n)
            return (k+frac);
    }
}
```

附錄：SIMPFRAC.CPP

將輸入之數值化為簡單連分數

```
/***** this is a programme which transform a number into a simple continuous fraction with
various accuracy *****/
#include <stdio.h>
void main()
{
   double x;
   int n;
   void contfrac(double,int);
   printf("\ninsert a number: ");
   scanf("%lf",&x);
   printf("please insert an integer as the amounts of fractions: ");
   scanf("%d",&n);
   printf("[");
   contfrac(x,n);
   printf("]");
}
void contfrac(double m, int n)
{
   int i=0, k=m;
   printf("%d",k);
   if(m==k)
      return;
   m=1/(m-k);
   k=m;
   printf(";%d",k);
   if(m==k)
      return;
   m=1/(m-k);
   while(i<n-1) {
      k=m;
      printf(",%d",k);
      if(m==k)
         break;
      m=1/(m-k);
      i++; }
}
```

附錄：整數 1 至 36 之算數根的無窮簡單連分數表示法：

$\sqrt{1}$	[1]
$\sqrt{2}$	$[1;\dot{2}]$
$\sqrt{3}$	$[1;\dot{1},\dot{2}]$
$\sqrt{4}$	[2]
$\sqrt{5}$	$[2;\dot{4}]$
$\sqrt{6}$	$[2;\dot{2},\dot{4}]$
$\sqrt{7}$	$[2;\dot{1},\dot{1},\dot{1},\dot{4}]$
$\sqrt{8}$	$[2;\dot{1},\dot{4}]$
$\sqrt{9}$	[3]
$\sqrt{10}$	$[3;\dot{6}]$
$\sqrt{11}$	$[3;\dot{3},\dot{6}]$
$\sqrt{12}$	$[3;\dot{2},\dot{6}]$
$\sqrt{13}$	$[3;\dot{1},\dot{1},\dot{1},\dot{6}]$
$\sqrt{14}$	$[3;\dot{1},\dot{2},\dot{1},\dot{6}]$
$\sqrt{15}$	$[3;\dot{1},\dot{6}]$
$\sqrt{16}$	[4]
$\sqrt{17}$	$[4;\dot{8}]$
$\sqrt{18}$	$[4;\dot{4},\dot{8}]$
$\sqrt{19}$	$[4;\dot{2},\dot{1},\dot{3},\dot{1},\dot{2},\dot{8}]$
$\sqrt{20}$	$[4;\dot{2},\dot{8}]$
$\sqrt{21}$	$[4;\dot{1},\dot{1},\dot{2},\dot{1},\dot{1},\dot{8}]$
$\sqrt{22}$	$[4;\dot{1},\dot{2},\dot{4},\dot{2},\dot{1},\dot{8}]$
$\sqrt{23}$	$[4;\dot{1},\dot{3},\dot{1},\dot{8}]$
$\sqrt{24}$	$[4;\dot{1},\dot{8}]$
$\sqrt{25}$	[5]
$\sqrt{26}$	$[5;\dot{1}0]$
$\sqrt{27}$	$[5;\dot{5},\dot{1}0]$
$\sqrt{28}$	$[5;\dot{3},\dot{2},\dot{3},\dot{1}0]$
$\sqrt{29}$	$[5;\dot{2},\dot{1},\dot{1},\dot{2},\dot{1}0]$
$\sqrt{30}$	$[5;\dot{2},10]$
$\sqrt{31}$	$[5;\dot{1},\dot{1},\dot{3},\dot{5},\dot{3},\dot{1},\dot{1},\dot{1}0]$
$\sqrt{32}$	$[5;\dot{1},\dot{1},\dot{1},\dot{1}0]$
$\sqrt{33}$	$[5;\dot{1},\dot{2},\dot{1},\dot{1}0]$
$\sqrt{34}$	$[5;\dot{1},\dot{4},\dot{1},\dot{1}0]$
$\sqrt{35}$	$[5;\dot{1},\dot{1}0]$
$\sqrt{36}$	[6]