~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~內容簡介~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

史密斯、布朗與瓊斯三人，同意用手槍來進行一場不尋常的三角決鬥。他們三人站在等邊三角形的三個角上，抽籤決定開槍的順序。每一輪，每人只能開一槍，接著依同樣次序進行下一輪。直到三人之中有兩人死掉為止。在每一輪中，槍手可以瞄準任何一個對手。參加決鬥的三個人都知道，史密斯的槍法最好，百發百中；布朗差一些，只有 80%的命中率；瓊斯更差，僅 50%。

假設每個人都採取對自己最有利的策略，而且沒有人是不小心被打死的，誰的生存機率最高？一個更難的問題是：他們三個人確切的生存機率各是多少？

天才老爹葛登能又來了！這回他準備了 20 個數學遊戲，要獻給喜歡動腦挑戰的你。這裡有走迷宮、拓樸遊戲、益智玩具，以及數字根、黃金比、邏輯推理、機率問題。

葛老爹將帶你從遊戲中出發，探討各式各樣的數學話題，進而體會遊戲背後的數學之美。

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~心得~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

在生活中，到處都可以見到數學的蹤跡，只要用心觀察，隨時都會發現數學之美，無論是在大自然中也好，在小小的數學遊戲中也好，每一件事物的背後，都有數學原理存在，我們可以說：這世界在創

造之時，是依照著數學原理所建構的，整個世界是建造在數學模型之上的。

在書中，我們可以看到，作者是如何在平凡無奇的事物背後，發現到數學美妙之處，是如何帶領讀者發現這些醉人的事物：在兩根螺絲釘嵌合轉動的問題中，作者用淺顯的譬喻告訴讀者其中的道理，在環繞世界飛行的問題中，作者也帶領讀者求出最經濟的環遊方法，在討論黃金比例的文章中，作者用圖形告訴讀者黃金比例和對數螺線的關聯……。是的，在這本書中，數學的美妙俯拾即是，作者借著這些告訴我們，不要忽略了身邊小事物所蘊含的數學知識—不要讓你好奇的心蒙上灰塵！

是的，不要忽略了身邊小事物所蘊含的數學知識，別讓自己迷失在繁亂的日常生活中，別讓塵世的喧囂鎖住我們那顆好奇的心，更別讓任何形式的桎梏加在我們敏銳的靈魂上；敞開我們的心胸，用我們那好奇的心去認識宇宙，用那敏銳的心靈迎接大自然的啟發，去體認那物外之趣，去發掘那被人遺忘的學問，追尋那真正的知識！

～2004.08.10～

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~研究~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

一、柏拉圖立體(Platonic solid)

在空間中，每一面皆為正多邊形的多面體稱為柏拉圖立體，這種正多面體只有五個，分別為：正四面體、正八面體、正方體(正六面體)、正十二面體、正二十面體；柏拉圖在《蒂邁烏斯篇》(Timeaus)中，分別將其中的四個柏拉圖立體對應上四個當時所認為的基本元素：正四面體對應火，正八面體對應風，正方體(正六面體) 對應土，正二十面體對應水，而正十二面體並未定義；在空間(三維)中，除了五種柏拉圖立體外，沒有其他正多面體存在，現在就讓我們來瞭解它的原因。證明如下：

pf：設正多面體的每一面皆為正n邊形　（$n \geq 3$）

在每個頂點有m邊相交　（$m \geq 3$）

v為頂點數　e為邊數　f為面數

$$mv = 2e \Rightarrow v = \frac{2e}{m} \cdots\cdots ⓐ$$

$$nf = 2e \Rightarrow f = \frac{2e}{n} \cdots\cdots ⓑ$$

將 ⓐ、ⓑ 代入Euler公式 $v-e+f=2$ 中，

得　$v-e+f = 2$

$$\Rightarrow \frac{2e}{m}-e+\frac{2e}{n} = 2$$
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

$$\Rightarrow \frac{1}{m}+\frac{1}{n} = \frac{1}{e}+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m}+\frac{1}{n} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2m+2n > mn$$

$$\Rightarrow (m-2)(n-2) < 4$$

$$\Rightarrow m = 3, 4, 5$$

$$\Rightarrow n = 3, 4, 5$$

將所有可能的情形列表如下(表 1)，可知當 $m = 3, 4, 5$ 且 $n = 3, 4, 5$ 時，只存在正四面體、正八面體、正方體(正六面體)、正十二面體、正二十面體這五種正多面體，故在空間(三維)中，除了五種柏拉圖立體外，沒有其他正多面體存在，得證。

〈表 1〉當 $m = 3, 4, 5$ 且 $n = 3, 4, 5$ 時，所有可能的情形

多面體	m	n	v	e	f
正四面體	3	3	4	6	4
正方體(正六面體)	3	4	8	12	6
正十二面體	3	5	20	30	12
正八面體	4	3	6	12	8
正二十面體	5	3	12	30	20

二、黃金比

1. 什麼是黃金比呢？在一條被分割成 A、B 兩段的線段中，以 B 段長為一單位，若整條線段的長度對 A 段長的比，等於 A 線段對 B 線段長度的比，這樣子的分割我們稱之為黃金比(golden ratio)，這兩個比率的值相等，都稱為 ϕ(phi)。

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 1.618$$

現在就讓我們來看看 ϕ 的一些表達方式，他們是不是很美呢？

$$\phi = 2 \cdot \sin 18^\circ \qquad (\sin 18^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4})$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

$$= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots}}}}}}}}$$

$$= \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots\sqrt{1-a}}}}}} \qquad (0<a<1)$$

講到 ϕ ，就不能不講講另外兩個和它一樣有名的親戚

—ϕ 的倒數 $\frac{1}{\phi}$ 以及 $\frac{1}{\phi}$ 的補數 $1-\frac{1}{\phi}$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 0.618$$

$$1-\frac{1}{\phi} = 1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \doteqdot 0.382$$

這樣的兩個數表面上看起來或許不怎麼美，但只要將其轉換為二進制表示，就可以看出端倪

$$\frac{1}{\phi} \doteqdot 0.618(\text{十進制}) \doteqdot 0.100111100000000(\text{二進制})$$

$$1-\frac{1}{\phi} \doteqdot 0.382(\text{十進制}) \doteqdot 0.011000011111111(\text{二進制})$$

$\frac{1}{\phi}$ 用二進制表示後，在小數點後的數剛好是 1 個 1，接著 2 個 0，接著 4 個 1，接著 8 個 0，剛好是太極生兩儀，兩儀生四象，四象生八卦的次序（按，周易繫辭上傳 ：「是故《易》有太極，是生兩儀，兩儀生四象，四象生八卦，八卦定吉凶，吉凶生大業」)；而 $1-\frac{1}{\phi}$ 就是將 $\frac{1}{\phi}$ 小數點後的數 1 換成 0、0 換成 1 即可。因此，我們可以說(用二進制表示)： $\frac{1}{\phi}$ 和 $1-\frac{1}{\phi}$ 之間是鏡面對稱之美， $\frac{1}{\phi}$ 展開來是平移對稱之美。

2. 再來讓我們看看一個和黃金比有關的數列：費波納契數列 (Fibonacci sequence)：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233………

在這個數列中，第一項及第二項為 1，第三項開始，每一項為前兩項之和，即：若數列｛x_n｝為 Fibonacci 數列，則

$$x_1=1\ ,\quad x_2=1\ ,\quad x_{n+2}=x_n+x_{n+1}$$

如果觀察這個數列，可以發現到從第三項開始，後項與前項的比值會越來越接近ϕ，為什麼會這樣呢？現在就讓我們來瞭解它的原因。證明如下：

pf：

① 若數列｛a_n｝存在 $a_{n+2} = p\cdot a_{n+1} + q\cdot a_n$

（$p\cdot q \neq 0$ 且 $p+q \neq 1$）

設 $p = \alpha+\beta$ ，$q = -\alpha\cdot\beta$ （$\alpha<\beta$）

可得 $a_{n+2}-\alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

$a_{n+2}-\beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$

得 ｛$a_{n+1}-\alpha a_n$｝ 為公比為 β 之等比數列

｛$a_{n+1}-\beta a_n$｝ 為公比為 α 之等比數列

② 由 ① 之結果可知

當 $a_1=1$，$a_2=1$，$p=1$，$q=1$ 時

即 $a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

數列｛a_n｝稱為 Fibonacci 數列，

而 α、β 為方程式 $x^2-px-q=0$ 之二根（$\alpha<\beta$）

亦即 α、β 為方程式 $x^2-x-1=0$ 之二根（$\alpha<\beta$）

$$\Rightarrow \alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ,\ \beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

故 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ 為公比為 β 之等比數列

又其首項 $a_2-\alpha a_1=1-\alpha=\beta$

$$\Rightarrow a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{ⓐ}$$

而 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ 為公比為 α 之等比數列

其首項 $a_2-\beta a_1=1-\beta=\alpha$

$$\Rightarrow a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{ⓑ}$$

ⓐ－ⓑ $\Rightarrow (a_{n+1}-\alpha a_n)-(a_{n+1}-\beta a_n)=\beta^n-\alpha^n$

$$\Rightarrow (\beta-\alpha)a_n=\beta^n-\alpha^n$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{\beta-\alpha}(\beta^n-\alpha^n)$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

故 Fibonacci 數列之通項為 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

③ 在 Fibonacci 數列中，設第 n 項為 x_n

則 $x_1=1$，$x_2=1$，$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$

因 Fibonacci 數列之通項為 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

當 $n \to \infty$ 時 $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \to 0$ ， $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \to 0$

故所求之比值

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

3. 若數列 $\{x_n\}$ 為 Fibonacci 數列，則

$$x_1 = 1 \ ,\ x_2 = 1 \ ,\ x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$$

如果第一、二項為任意數，其餘規則與 Fibonacci 數列同，這樣子所形成的數列，其後項與前項的比，會越來越趨近於 ϕ 嗎？答案是會的。證明如下：

pf：

設數列 $\{T_n\}$ 存在下列規則：

$$T_1 = a \ ,\ T_2 = b \ ,\ T_{n+2} = T_n + T_{n+1} \qquad (a, b \in R)$$

$\{T_n\}$ = a ， b ， $a+b$ ， $a+2b$ ， $2a+3b$ ，

$3a+5b$ ， $5a+8b$ ， $8a+13b$ ， $13a+21b$ ，

$21a+34b$，$34a+55b$，$55a+89b$，$89a+144b$，

$144a+233b$，$233a+377b$，…………，$p_{n-2}a+q_{n-1}b$

從第三項起，a 的係數 p_{n-2} 所形成的數列 $\{p_{n-2}\}$ 為一 Fibonacci 數列，從第二項起，b 的係數 q_{n-1} 所形成的數列 $\{q_{n-1}\}$ 亦為一 Fibonacci 數列，

比較 $\{p_{n-2}\}$ 與 $\{q_{n-1}\}$，得 $p_{n-1}=q_{n-1}$

又數列 $\{T_n\}$ 之後項與前項的比，在 $n\geq 3$ 時

為 $\dfrac{T_{n+1}}{T_n}=\dfrac{p_{(n-2)+1}a+q_{(n+1)-1}b}{p_{n-2}a+q_{n-1}b}$

當 $n\to\infty$ 時，$\dfrac{T_{n+1}}{T_n}$ 之值，亦即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_{n+1}}{T_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{p_{(n-2)+1}a+q_{(n+1)-1}b}{p_{n-2}a+q_{n-1}b}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{p_{n-2}a}+\dfrac{q_nb}{p_{n-1}p_{n-2}a^2}}{\dfrac{1}{p_{n-1}a}+\dfrac{q_{n-1}b}{p_{n-1}p_{n-2}a^2}}$$

因 $n\to\infty$ 時 $\dfrac{1}{p_{n-1}a}\to 0$ 且 $\dfrac{1}{p_{n-2}a}\to 0$

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{p_{n-2}a}+\dfrac{q_nb}{p_{n-1}p_{n-2}a^2}}{\dfrac{1}{p_{n-1}a}+\dfrac{q_{n-1}b}{p_{n-1}p_{n-2}a^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{q_n b}{q_{n-1} b} = \lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{q_{n-1}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

4. Fibonacci 數列的一些性質：

設數列{ x_n }為 Fibonacci 數列，則

$x_1 = 1$ ， $x_2 = 1$ ， $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$

① $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots\cdots + x_n = x_{n+2} - 1$

② $x_2 + x_4 + x_6 + \cdots\cdots\cdots + x_{2n} = -1$

③ $x_1 + x_3 + x_5 + \cdots\cdots\cdots + x_{2n-1} = x_{2n}$

④ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots\cdots\cdots + x_n^2 = x_n x_{n+1}$

⑤ $x_{n+m} = x_{n-1} x_m + x_n x_{m+1}$

⑥ $x_{2n} = x_{n+1}^2 - x_{n-1}^2$

⑦ $x_{n+1}^2 - x_n x_{n+2} = (-1)^n$

5. 再來，讓我們看看黃金比例在幾何中的部分：黃金矩形、黃金長方體、對數螺線—

①黃金矩形：長寬比為 1： ϕ 的長方形稱為黃金矩形，如圖 1，將黃金矩形 ABCD 截去一正方形 ABFE，餘下之矩形 CDEF 亦為黃金矩形，將母子矩形畫上如圖 1 中之對應對角線，它們永遠交於 O 點，此點亦為內切於黃金矩形中之對數螺線之收斂中心，數學家皮寇佛

(Clifford A.Pickover)建議稱此點為「上帝的眼睛」。

②黃金長方體：長寬高為 ϕ ：1：$\frac{1}{\phi}$ 的長方體，稱為黃金長方體，其表面積與其外接球體的表面積之比為 ϕ ：π ，證明如下：

pf：設黃金長方體之邊長為 ϕk ，$\frac{1}{\phi}k$ ，k （$k\in$R）

則其表面積為

$$2(\phi k \cdot k + \phi k \cdot \frac{1}{\phi}k + \frac{1}{\phi}k \cdot k)$$

$$= 2(\phi k^2 + \frac{1}{\phi}k^2 + k^2) = 2k^2(\phi + \frac{1}{\phi} + 1)$$

又其外接球體之半徑為

$$\frac{1}{2}\sqrt{(\phi k)^2 + \left(\frac{1}{\phi}k\right)^2 + (k)^2} = \frac{k}{2}\sqrt{\phi^2 + \frac{1}{\phi^2} + 1}$$

外接球體之體積為

$$4\pi\left(\frac{k}{2}\sqrt{\phi^2 + \frac{1}{\phi^2} + 1}\right)^2 = \pi k^2(\phi^2 + \frac{1}{\phi^2} + 1)$$

黃金長方體之表面積與其外接球體的表面積之比值為

$$\frac{2k^2\left(\phi + \frac{1}{\phi} + 1\right)}{\pi k^2\left(\phi^2 + \frac{1}{\phi^2} + 1\right)} = \frac{2\phi(1+1)}{\pi(3+1)} = \frac{\phi}{\pi}$$

黃金長方體之表面積與其外接球體的表面積之比為 ϕ ：π ，得證。

③對數螺線(logarithmic spiral)：如圖 2，對數螺線以極座標表示其方程式即為

$r = e^{a\theta}$ （if a>0 左旋 ，if a<0 右旋）

對數螺線是唯一的一種當尺寸變大也不會改變形狀的螺線，所謂的黃金螺線(golden spiral)即對數螺線，內接於一條黃金螺線的矩形為「黃金矩形」，其長寬比值為 ϕ。

又，如圖 3，此為對數螺線的等角性質，通過極點 O 的每一條直線，都以相等的角與對數螺線相交；對數螺線也是唯一擁有此一性質的螺線，所以對數螺線也被稱做「等角螺線」。另外，如圖 4，從 P 點量到極點的弧長，與對數螺線在 P 點的切線量到 y 軸的距離相等，即 $\overline{PT} = P$ 點到 O 點之弧長，此一性質證明如下：

pf：對於一個以極座標表示的曲線 $r = f(\theta)$，其弧長公式為

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

又 $r = e^{a\theta}$ ， $\dfrac{dr}{d\theta} = a e^{a\theta} = a r$

故 $$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= \sqrt{1+a^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{a\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left(e^{a\theta_2} - e^{a\theta_1}\right)$$

令 θ_2 固定，若 $a > 0$ 則令 $\theta_1 \to -\infty$ （左旋）

若 $a < 0$ 則令 $\theta_1 \to +\infty$ （右旋）

則可知 $e^{a\theta_1} \to 0$

故 $S_\infty = \lim\limits_{\theta_1 \to -\infty} S = \dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\theta_2} - e^{a\theta_1})$

$$= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} e^{a\theta_2} \quad (a > 0) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{ⓐ}$$

$$S_\infty = \lim_{\theta_1 \to -\infty} S = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\theta_2} - e^{a\theta_1})$$

$$= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} e^{a\theta_2} \quad (a < 0) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{ⓑ}$$

綜合 ⓐ、ⓑ 得

$$S_\infty = \lim_{\theta_1 \to \pm\infty} S = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} e^{a\theta_2} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} r_2$$

如圖 4，在左旋的對數螺線中，

令 $\theta_2 = \alpha$ ， $\theta_1 \to -\infty$ ， $r_2 = \overline{OP}$

將 $a = \cot\alpha$ 代入 $S_\infty = \dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a} r_2$ 中，

則得 $S_\infty = \dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a} r_2 = \dfrac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha} r_2$

$$= \frac{r_2}{\cos\alpha}$$

又 $$\cos\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{PT}} = \frac{r_2}{\overline{PT}}$$

故 $$\overline{PT} = \frac{r_2}{\cos\alpha} = S_\infty$$

同理，在左旋的對數螺線中，

$$\overline{PT} = \frac{r_2}{\cos\alpha} = S_\infty$$

故得證，從 P 點量到極點的弧長，與對數螺線在 P 點的切線量到 y 軸的距離相等。這個性質，是在 1645 年由伽利略的門徒托里切利發現的，他用一個無窮級數的和，來逼近該弧長，而得到此一驚人的事實。

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~參考資料~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

1. 笹部貞市郎,《代數學辭典(下)》,九章出版社譯,九章出版社,台北,1992。

2. 倫迪(Miranda Lundy)、薩頓(Daud Sutton),《典雅的幾何(Scared Geometry & Platonic and Archimedean Solids)》,葉偉文譯,天下遠見出版股份有限公司,台北,2002。

3. 余文卿、康明昌、鄭國順,《高級中學基礎數學 統合(下)》,牛頓出版股份有限公司,台北,1995。

4. 嚴鎮軍,《從正五邊形談起》,九章出版社,台北,2001。

5. 黃家禮,《幾何明珠》,九章出版社,台北,2000。

6. 毛爾(Eli Maor),《毛起來說 e (e:The Story of a Number)》,鄭惟厚譯,天下遠見出版股份有限公司,台北,2000。

7.《新譯易經讀本》,郭建勳注譯,三民書局,台北,2002。

作者: 227 44 陳雲昶
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~