讀書報告：迷宮、黃金比、索馬立方體

此書可用「一罈深而見底的陳年新釀」形容；乍見此句似乎自相矛盾，但實是確切，理論艱深，解釋則清晰透底；累積了多少先人的思考，應用及例題卻富含創意，充滿新見解；讀來令人如痴如醉，令人拍案，如飲佳釀。我選了幾章，以下是我的一點心得。

第一章　　五種柏拉圖立體 ：

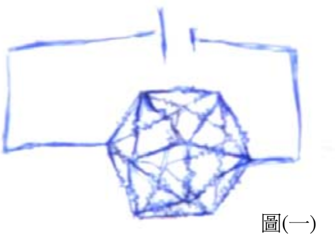
本章中每一個例子，我都有做出成品；只有五種正多面體：四面、六面、八面、十二面及二十面體，各由正三角形、正方形、正五邊形組成，正六邊形以上便無法構成立體，因爲構成一個多面體的頂點至少須三個平面，而正六邊形每個內角 120 度，三個角合起來正好是一個平面；內角 120 度以上更不用說——三度空間中是不可能把三個正七邊形三面共點拼起來的。

我還把正六面體和正十二面體的每個面都以正三角形組合取代，發現原本的頂點都會由六個正三角形圍成，理由很簡單，原本每面的正多邊形，由三角形構成時，其每一條邊都以三角形的一邊代替，一個角就由兩個三角形拼在一起；而正六、正十二面體分別由正四、正五邊形組成，都由其中三面的各一個角共一個頂點;這也顯示了正方形和正五邊形因角度的限制都只能構成一種正多面體。如果以正二十面體變形，會變成一個類似海膽的星形，原本的每一個頂點就會由十個三角形圍成。

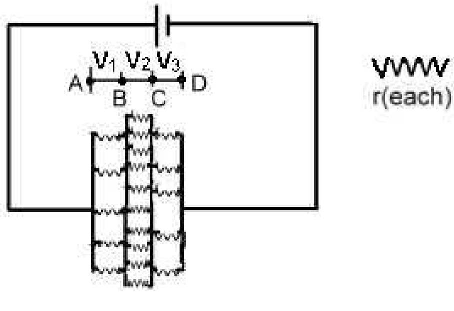
我當初在用三角形組合變形十二面體(標題左邊)的時候，遇到了很大的困難，讓我以爲那相臨的六個三角形構成的是正六邊行形，以至無法成爲立體；後來才發現經過「折」的動作，頂點周圍不爲平面，六面體的變形也是如此。

順便一提，我用來拼裝的材料是童心園出品的「百力智慧片」，有正三角、四角、五角和六角形，是相當益智的兒童玩具及教具，可惜公司已不在；不過市面上應該還有類似的商品。

我從本章還學到了另外兩項新知。其中之一是立體電路之電阻算法，書中舉的是正立方體電路，我且試試正二十面體(因爲它有相對稱的兩點)：
若如下圖(一)，將正二十面體結構之電路中一組相對的頂點個連接一條電線，通以電流，則可簡化成下圖(二)，如設 AB 兩點間電壓爲 V_1，BC 兩點間爲 V_2，CD 兩點間爲 V_3，每個電阻均爲 r ，則可列出下面的算式：



圖(一)



$$V_1/(5V_1/r) + V_2/(10V_2/r) + V_3/(5V_3/r) \quad = \quad r/5 + r/10 + r/5 = r/2 \text{..........(Answer)}$$

※註：式子是我自己導出，非抄襲公式 ^_^

我第二個學到的是二進位的應用。書中舉的例子是八面體骰子的把戲：首先，取一個八面骰子，此骰子上有 0 ~7 的數字，並以每兩個相對的面上數字之和都是 7 的方式排列。要某人自 0 ~ 7 間選一個數字，但不要說出來。握住骰子，讓他只能看見 1、3、5、7 ，並問他選的數字在不在裡面，若答是 ，計下 1 ；如答否，計下 0 ；接著，再露出 2、3、6、7 ，再問一次；這回，若答是，計下 2，若否，計下 0；再露出 4、5、6、7 ，問最後一次，答是計 4，否仍計 0。現在，將計下的數字和告訴他，他會很驚訝，因爲這就是他想的數字。

這是設計好的，二進位系統中，數字不是 1 就是 0 ，因此我們可以得到相當明確的答案；注意到了嗎，1 在三次中只出現 1 次，7 則三次都出現，因爲 7 正好是 1+2+4；二進位中，只有 0~7 的整數 不超過 3 位，只要依每個數中每一位的 1 或 0 來決定要在三次中的哪幾次出現，就能反過來推出對方心中想的數。

市面上有一些數學遊戲也是利用二進位，使玩家可以猜出對方心中想的項目。我在讀這一段的時候，剛好到人家家做客，他們家有就有一套這種遊戲；那是一些紙牌，有好幾堆，每堆都有

不同主題，如姓氏、縣市等；當時我玩的是姓氏的那堆，每張紙牌上有數十個姓氏，都用數字編號，主人的小孩要我選一個姓，並挑出有此姓的紙牌，他立刻講出了我所想的那一個姓氏；後來他告訴我秘訣：把左上角的編號加起來，其和就是我選的姓的編號。當時我百思不得其解，只覺妙不可言。後來我想出了書上例子後，立刻聯想在一起，發現了這也是二進位的運用。以下是我自己設計的一組紙牌，寫的是國中班上同學的座號：

1 , 3 , 5 , 7 9 ,11,13,15 17,19,27,29 31,33,35,37 39,41,43,45	2 , 3 , 6 , 7 10,11,14,15 18,19,26,27 30,31,34,35 38,39,42,43	4 , 5 , 6 , 7 12,13,14,15 18,29,31,36 37,38,39,44 45
8 ,9 ,10 ,11 12,13,14,15 26,27,28,29 30,31,40,41 42,43,44,45	16,17,18,19 26,27,28,29 30,31	32,33,34,35 36,37,38,39 40,41,42,43 44,45

因爲二進位從第一位起，數字 1 分別代表 1、2、4、8、16......如要在紙牌上表示 16，就必須在第五張寫上 16 ，而且只有這一張上有此數，又此數定是這張上最小的(小了 1 就是 15 ，15 = 1+2+4+8，不會在這張，但前四張都有 15。) 如果自左寫到右，它就會出現在左上角。把選出紙牌左上角的數加起來，就是你想的座號。

※註：我們班的座號自 19 號直接跳到 26 號，最後一號是 45，因此 20 ~ 25 及 46 以上省略了，要不然每張應該一樣多個數字。(後來我用來盤問同學喜歡的人，頗有良效。)

至於十進位究竟有沒有這種把戲可玩？我覺得可能重複多次，也可推算吧，但就麻煩的多了。

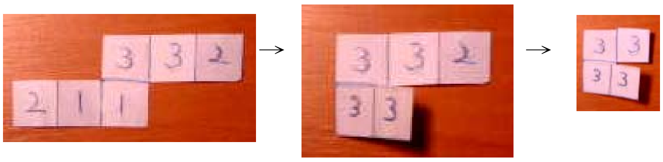
第二章：折變四邊形：

本章的主題很特別。簡單介紹一下，折變四邊形是由許多一樣大小的正方形紙片連接而成的平面結構，每格間因以一邊相連，可以互相摺疊，又每一格的正反面各有不同標記，透過適當的摺疊操作，可以把重複的標記翻在同一面並列。三種面的稱三階，四種就稱四階，以下類推。前陣子有一個姚明拍的麥當勞廣告：一個人騎在另一人背上穿著姚明套裝幫他亂打一場球賽，而姚明本人在麥當勞玩一種漢堡薯條的玩具，想起來了嗎？我忘記廣告中說那叫什麼玩具，但那就是四階的折變四邊形。我以前沒有玩過折變四邊形，所以將書上舉的兩種都做出來玩；其實不難，不過我都是亂折，無意間成功的。

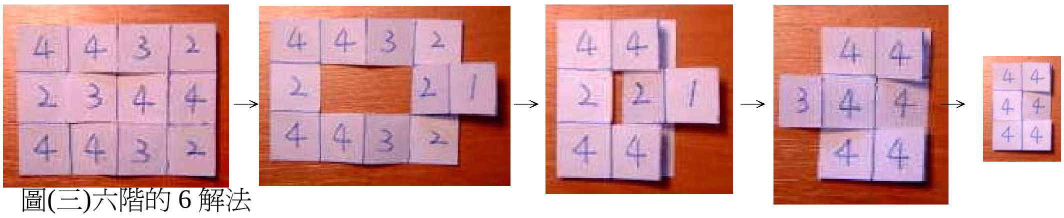
我只能看出大略的規則：(1) 兩個相交的相同數字格間隔必需是偶數格(2n)，包括轉角。因爲如此就能把中間的數對折起來(n 次)，讓兩個相同的數在一起。如果一個數 a 在背面，與它相同的數 a' 在正面，也是如此，不過 a 的反面那格也要算在 2n 中；換句話說，a 在距 a' 奇數格的位置之反面。 (2) 以上規則在排列時，假設由 a1 開始向左排 2n 格至 a2，不能再由 a2 往右排 2m 格至 a3，因爲包括 a1 在內是 1+2n 格，減去 2m 後爲奇數，將不能跟 a 在同一面。 (3) 若最後的排列，即當某一面都是相同的數時，是 2 x 2 的方格，則一個格子只能鄰兩個格子，在排列時不相鄰的格子不一定要間格偶數格，但相鄰的就定要如此。例如剛剛的 a1 就可以向右數 2n 格寫 a3，因爲 a3 只跟 a1 相鄰，a2 也跟 a1 相連，故 a2 和 a3 也會在同一面。

儘管看出這些規則，我仍無法自己創造出一個折變四邊形，或許在形狀上也有某種限制吧，我不知道。圖(一) ~ (三)是書中的三個例子，分別是三階、四階、六階的，我分別列出數字最大的那面的解法：

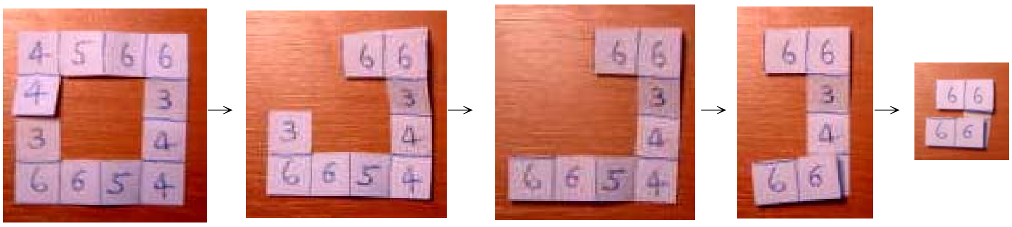
圖(一) 三階的 3 解法



圖(二)四階的 4 解法

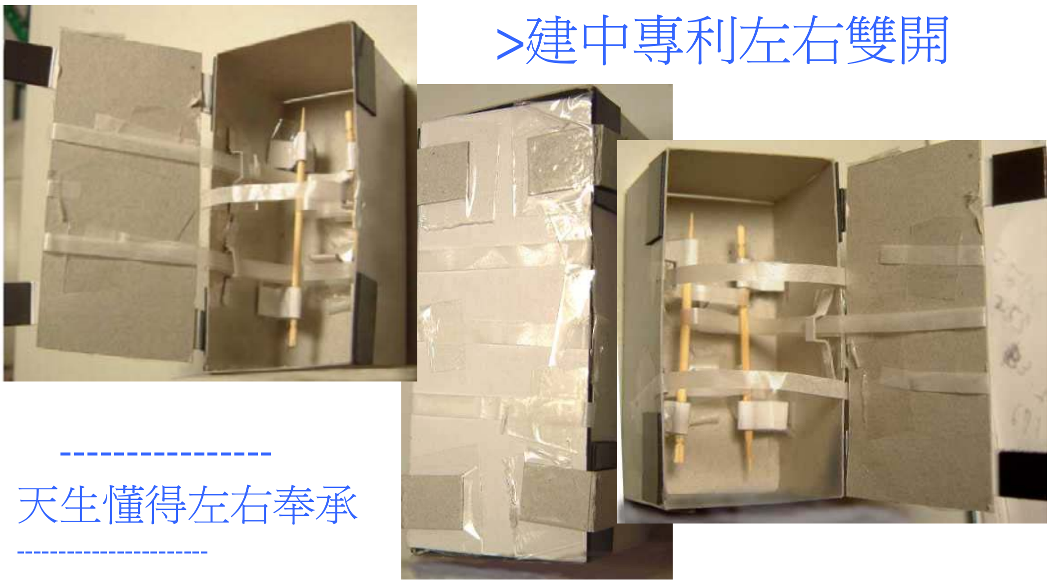


圖(三)六階的 6 解法



書中還特別指出有種玩具叫「傑可布梯子」(Jacob’s Ladder) 是三階折變四邊形結構，是數片木片(或其他硬版)，由緞帶連接而成；我不明白爲什麼是三階，明明是兩面……不過我還是做了一個，挺有趣的，左斜右偏木片就會一片片不斷換面翻下，雖然不明白這跟折變四邊形的關係，但是我想到了一種有趣的東西：雙開式箱子。聲寶推出了一種「左右開冰箱」，一扇門裝了左右各一個門把，兩個都能開門，很玄吧。我試著用傑可布梯子的結構來做出能左右開的盒子，花了一個上午，門是能左右開了，但是門軸不知道如何固定(根本不能固定，一固定就不能雙開了)，而且一開門就有一條立可帶擋在面前(我用來代替緞帶)；後來想到用磁鐵固定門軸，如此變發生了最糟的事：根本直接用磁鐵就能左右開了，我一整天算是做白功了。不過我相信一定有方法克服，因爲理論上這種結構是可行的，或許加幾個齒輪或幾個筍頭，但超出我的能力之外了。

下面就是我的成品：



圖(四) 高級貨呀！

圖(五)傑可布梯子(Jacob’s Ladder)

第四章：數字根：

本章講的數論在高中大概是簡單的吧……但是我還是挺高興我學會了，我只提一點：骰子遊戲。

任意選定一個數字(通常是 20 以上)，作爲遊戲的目標，然後兩人一起玩；第一個人先擲出骰子(六面)，記下出現的點數，從 0 開始加上此數；接下來都不擲骰子，從第二個人開始，每個人輪流將骰子轉四分之一圈，並加上剛剛的點數。直到其中一人加上他轉到的數字時，正好等於剛剛約定的數，就算他贏了，而超過或不足的一方則爲輸家。

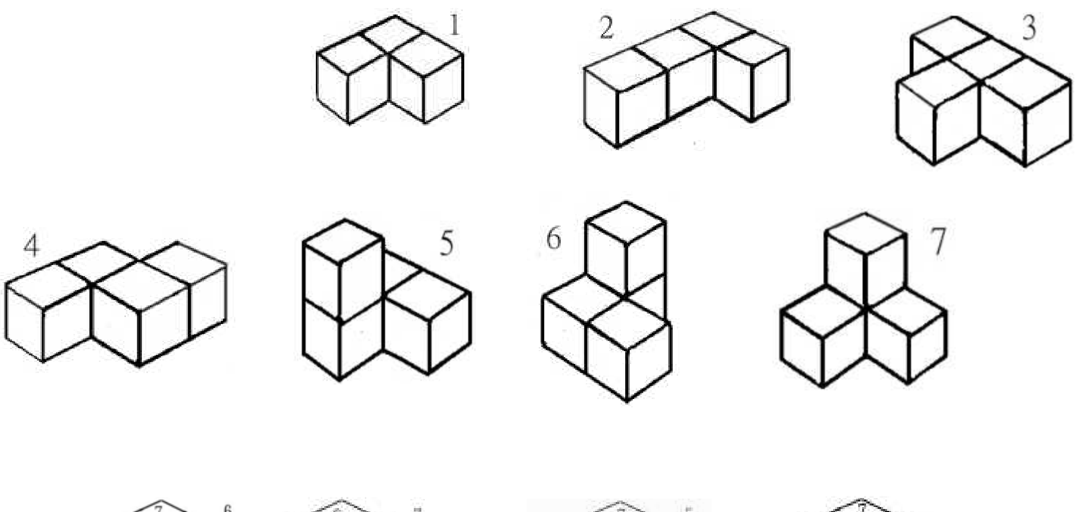
書上提到很重要的策略——搶目標數對九的同餘數，當然，從數字根開始就要搶。

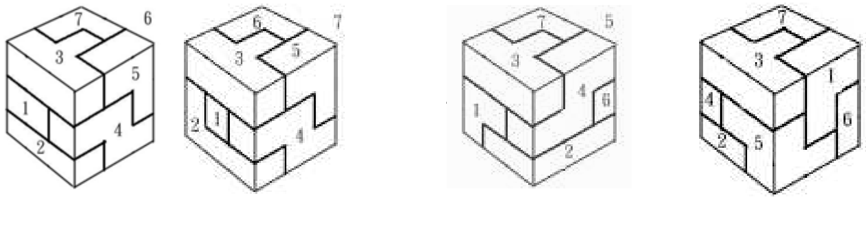
理由是，9 是最大的數字，當然這裡用十進位；因此從數字根開始，不管你轉到什麼數，都無法一次搶到下一個同餘數，對手則可以說「輕易」的搶到，搶到最後一個數，也就是目標，一開始得到數字根的人「可說」是穩操勝算。我之所以加引號是因爲我覺得不夠好。

假設數字根是 7，某人搶到了，下一人卻轉到 1 或 2，那某人轉哪一邊，都無法搶到最近的同餘數了，我的問題是，爲什麼不搶對模數 7 的同餘數呢？這樣不是更容易搶到嗎？不過這樣是否就保證了後玩者贏？似乎也不一定，經過我的嘗試…我分析不出來…應該是看技巧而定吧。書中把找對九的同餘數之方法做了詳細的分析，似乎有辦法在一開始就確定勝利。

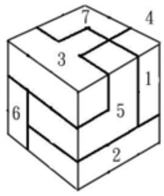
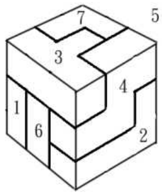
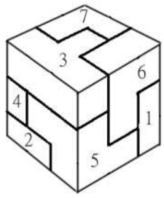
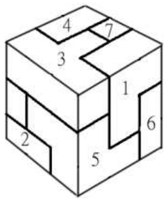
第六章：索馬立方體：

這是最好玩的一章了，因爲拼索馬立方體是很有趣的，我還常跟我妹賭，放一首歌，看她能不能在樂曲結束前拼成正立方體，賭注一元(因爲蠻簡單的)，而每次都是她贏。索馬立方體是由下圖的七塊組件組成，每一塊都是小塊立方體組成的不規則形狀；這章我沒什麼好說的，因爲都是亂拼而成，不過有好幾種，以下列出(組件依照書中的方法編號，每個立方體圖右上角的數字是此角度看不到的組件編號)：

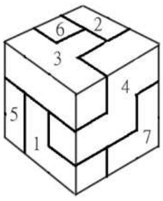
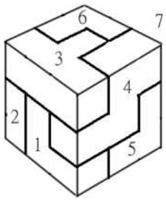
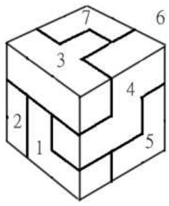
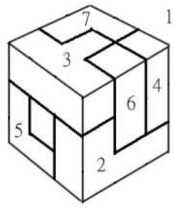




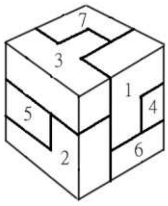
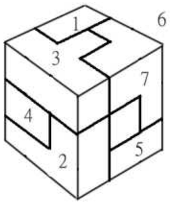
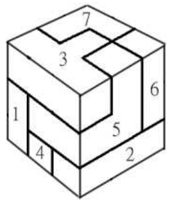
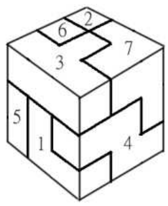
(1) (2) (3) (4)

(5) (6) (7) (8)

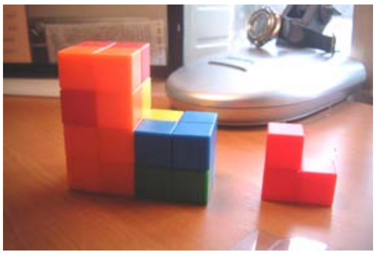
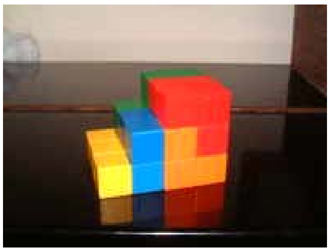
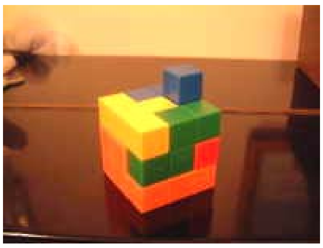
(9) (10) (11) (12)

(13) (14) (15) (16)

當我在用電腦繪圖的時後，碰到一個問題；我之前在組合時，每成功拼成一個就用筆畫下來，卻都忘了編號，以為單從一種角度就能照圖拼出；一個立方體最多同時只能看到三面，又單從一面頂多確定三塊的位置；因此輸入電腦時，我只好重新照圖拼一次，結果無意間又多拼出了好幾種，算是意所未料的結果。

我粗略的估計一下，一個索馬立方體中，每個面最少會浮現出三種組件，單就一個面而言，七塊組件在單面都只出現三個的情況下，就有〔$(7^3-7)/6$〕$-14 = 35$ 種情形，若把立方體分成上下兩部分，每部分都是 35 種，組成的立方體就有 35 x 34 (1000 多)種。這種方法很粗略，說不定根本就不對，但是足以顯示出索馬立方體之多，我做出的每一個成品都沒重複是很正常的。另外還有些有趣的形狀，我就不詳細標示了，有興趣可以自己做。

圖(一 ~ 三) 組件 1 的放大、階梯、外表看不出來有缺但多了一格的索馬立方體