

◎書名：【沒有數字的數學】

◎內容：

主要在介紹具有特定性質的圖形，說明這些圖形的定義、延伸。一開始介紹了歐拉圈(一筆劃描繪所有線段)、漢米頓圈(一筆劃遊歷所有點)，之後開始對漢米頓圈作延伸，像漢米頓連結圖、漢米頓可蕾絲圖、泛圈圖等；在第六章的部分開始提到容錯漢米頓圖，也就是允許邊或點故障的漢米頓圖，介紹了單點容錯漢米頓圖、單邊容錯漢米頓圖、次漢米頓圖、一對點容錯漢米頓圖、單邊容錯漢米頓可蕾絲圖.....等等；最後又提到了三筆劃連結及圖形的分解、合成。

書中提供了很多圖形，要讀者動手畫一畫，去證實、去思考；另外，在腦力大挑戰的部分，它也提出一些圖形之間的關聯性，以及如何證明的方法。

◎心得：

這本書除了第一章介紹的是歐拉圈(一筆劃描繪)，第二章之後幾乎都是漢米頓圈的延伸；而歐拉圈的大部分性質，像是否可以一筆劃完成、起終點的位置，甚至是任何圖需要幾筆劃完成，書中幾乎都已經說明了判別的方法。但是漢米頓圈的部分，雖然書中提供了3個畫的規則，但很明顯的在複雜的圖形中，要正確畫出一筆劃遊歷仍然不容易。所以我再思考了這部分，發現一種比較快完成一筆劃遊歷的方法。

其實任何一個一筆劃遊歷的解(漢米頓圈)，都是一個囊括所有點的大圈。我所用的這種方法，就是一開始選擇一個格子作為起點，以這個格子開始作延伸、擴張，直到擴張的格子囊括所有點為止。當然一開始選擇的格子也有可能是錯誤的，但因為任一點周圍格子至少有一個是選擇的格子，所以這個點周圍的格子至少有一個是可以作為起點的；所以找出相鄰格子數最少的點，就可以試最少次。當然這種方法也有幾個原則：

【原則一】所有選擇的格子不能形成一個環狀

因為一但形成環狀，環中間的點就連接不到外圍，這不符合用一個圈囊括所有點。**【圖 1】**

【原則二】任何一點周圍的格子，至少要有一個是選擇的格子

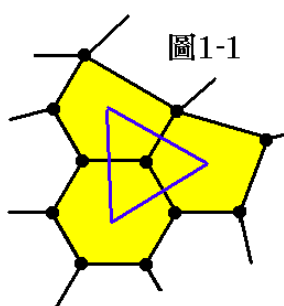
否則就連接不到這個點。

【原則三】所有選擇的格子必須連在一起

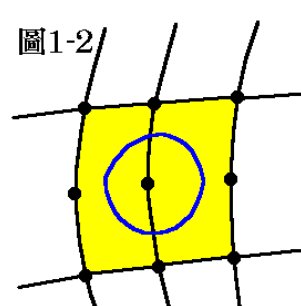
若選擇的格子分開，就無法一筆劃遊歷。

【圖 1】

若使用的格子成環狀，環中央的點連接不到外圍
→

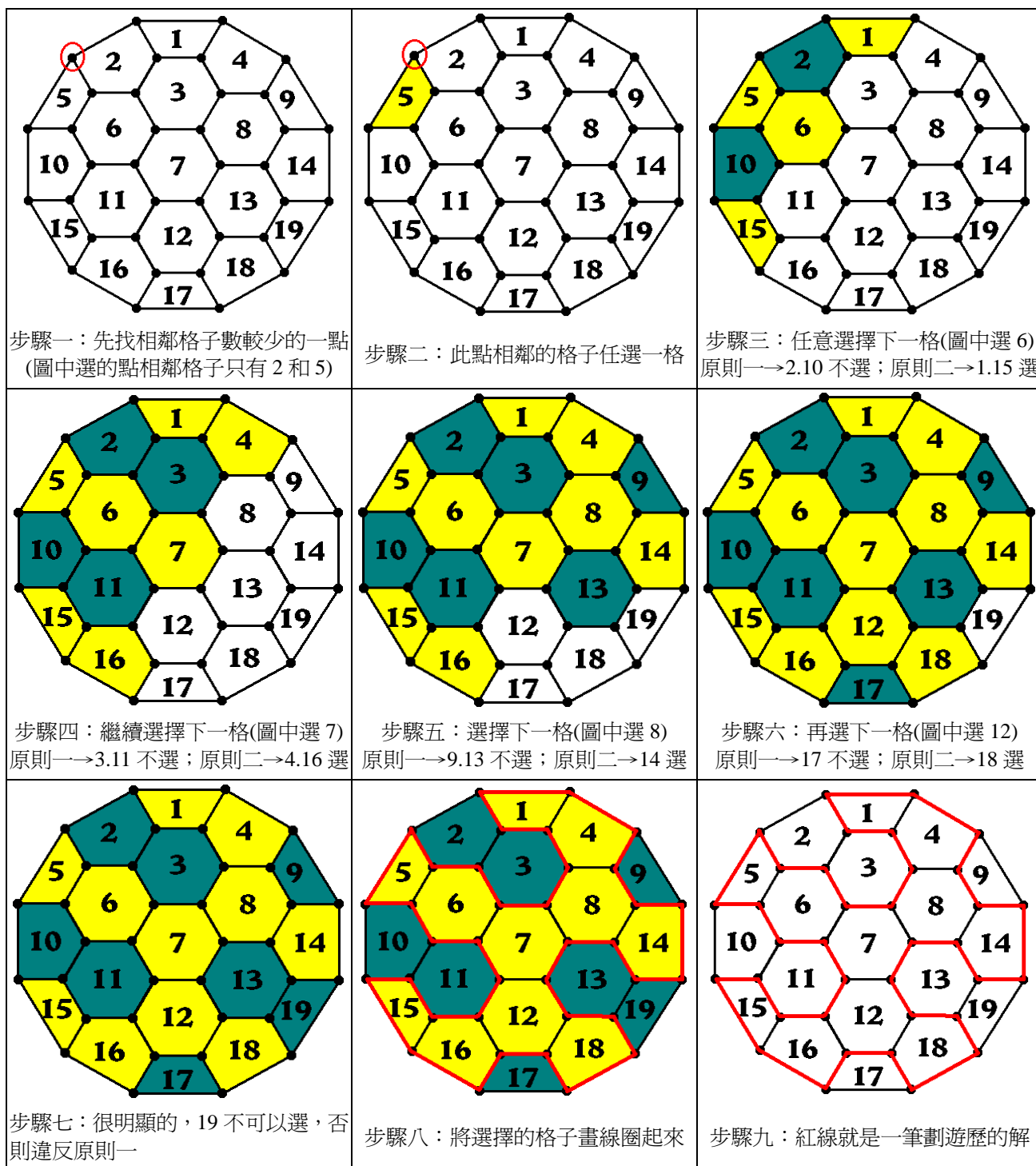


原則一也延伸出另一個規則：任兩個選擇的格子，相鄰的邊數最多只能是“1”→



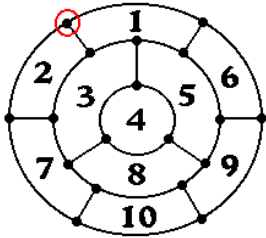
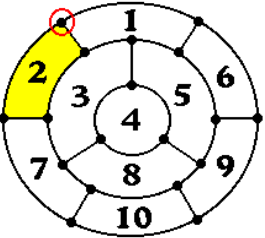
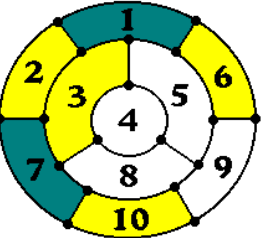
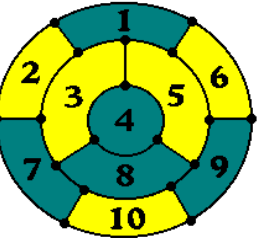
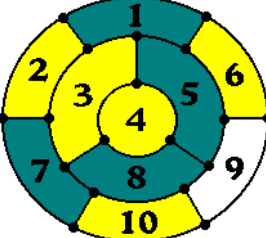
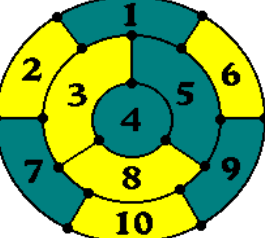
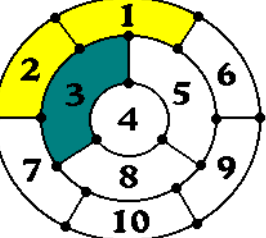
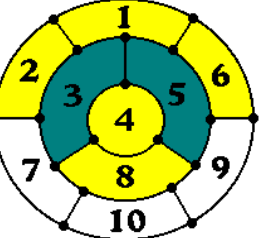
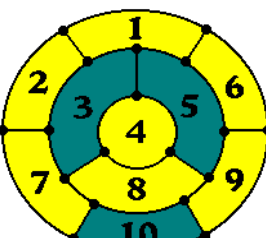
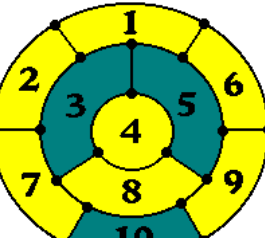
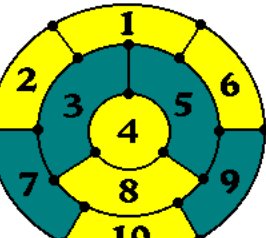

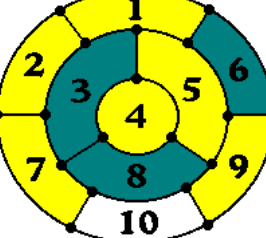
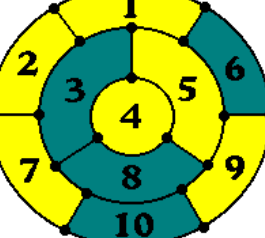


※ 用選格子的方法解「圖 2-19」

(選擇的格子以黃色表示，非選擇的格子以藍綠色表示)



當然實際上，不用替格子編號，也不用替格子著色，上面只是為了清楚說明步驟；真的在找一筆劃遊歷的解時，要選的格子和不選的格子做個記號就好(例如圈和叉)。圖 2-19 的解其實有很多，在步驟一到步驟六如果選不同的格子，也會有不同的解，而且所有的解都可以用這種方法畫出來。至於選格子的途中會不會選錯？會，不見得隨便選都一定有解，所以選錯了，就只好找另一條畫法。

※ 接著用選格子的方法再解「圖 2-7」

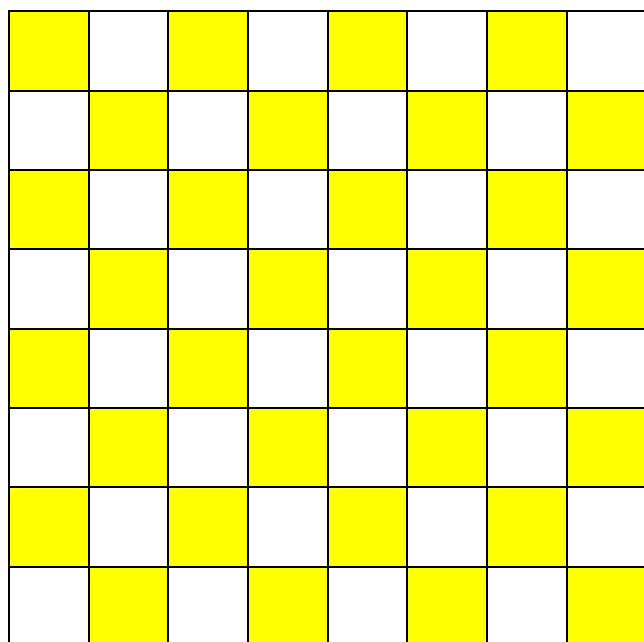
 <p>步驟一：找相鄰格子數較少的一點</p>	 <p>步驟二：此點相鄰的格子任選一格</p>	 <p>步驟三：任選下一格(圖中選3)。原則一→1.7 不選；原則二→6.10 選</p>	 <p>步驟四：選下一格(圖中選5)。原則一→4.8.9 不選；格子畫完了，但違反了原則三，故選5不對</p>
 <p>步驟五：回到步驟三，再選4。原則一→5.8 不選；很明顯的，9 不論選不選，都違反原則三，故不能選4</p>	 <p>步驟六：再回到步驟三，選8。原則一→4.5.9 不選；這張圖仍違反原則三，可見步驟三中「選3」是錯的</p>	 <p>步驟七：回到步驟二，3 不選，改選1</p>	 <p>步驟八：任選下一格(圖中選6)。原則一→5 不選；原則二→4 選；原則三→8 選</p>
 <p>步驟九：下一步選7。原則一→10 不選；原則二→9 選；這張圖也違反了原則三</p>	 <p>步驟十：回到步驟八，選9。結果和步驟9一樣</p>	 <p>步驟十一：回到步驟八，選10。原則一→7.9 不選；這張圖違反原則三</p>	 <p>步驟十二：回到步驟七(因為選6後都錯誤)，選5。原則一→不選6；原則二，選9</p>
 <p>步驟十三：再選4(選8違反原則一)。原則一→不選8；原則二→選7</p>	 <p>步驟十四：10 不能選，否則違反原則一</p>	 <p>步驟十五：將選擇的格子畫線圈起來</p>	 <p>步驟十六：紅線就是漢米頓圈</p>

「圖 2-7」本身只有一種解法(不包括對稱和旋轉的答案)，所以較不容易找出解。在上面的解法中，幾乎已經把錯誤的選法都選過了，這是為了說明：一但選錯了，不用全部重來，只要回到錯誤的前一步重選就好了。

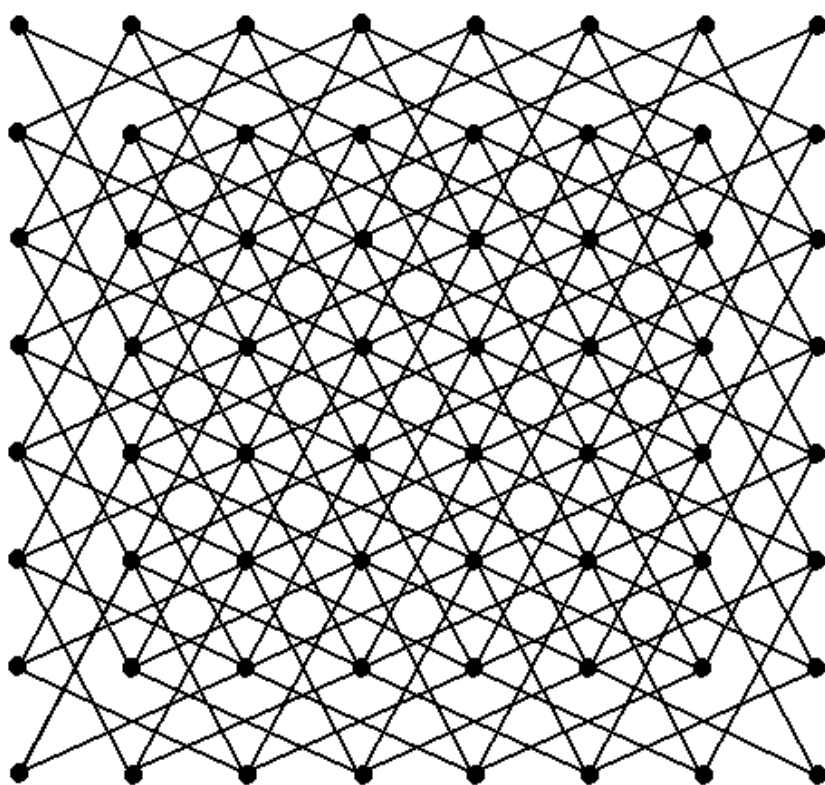
* 其實步驟四(選5)和步驟六(選8)是個對稱的選法，可以跳過步驟六不選8；一樣的，步驟九(選7)和步驟十(選9)也有相同的性質。

在前面兩張圖中，都用了選格子的方法來解。但是如果有一張圖的線段有交錯，那選格子就不能很明確的表示了；這時候，就把要選的格子用「畫線」的方式來表示。

書中第二章曾經提到，要以騎士的走法，走完 8x8 的西洋棋盤，最後回到出發點。這個騎士遊歷問題，很明顯的，就是一筆劃遊歷的部分。我把 8x8 的格子，改成下面的這張圖。每個點就是代表一個格子，線就是格子能走的路(騎士走法)；只要把這張圖的一筆劃遊歷解找出來，相對的就能找到騎士遊歷的答案。



← 8x8 西洋棋盤



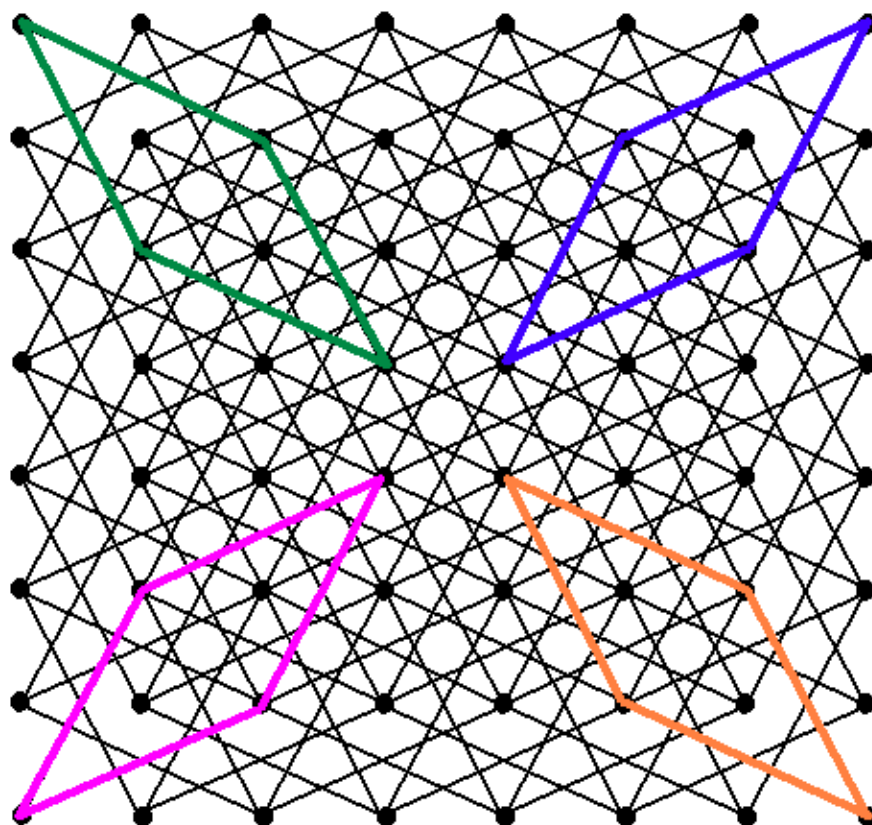
漢米頓圖形→

※ 解「圖 2-4」

步驟一：

因為角落的四點連接的邊都只有 2 條，所以這兩條線一定會畫到。如圖，利用這 2 條邊畫出一個格子。(當然，畫法不只一種，我找的是較容易看出的格子)

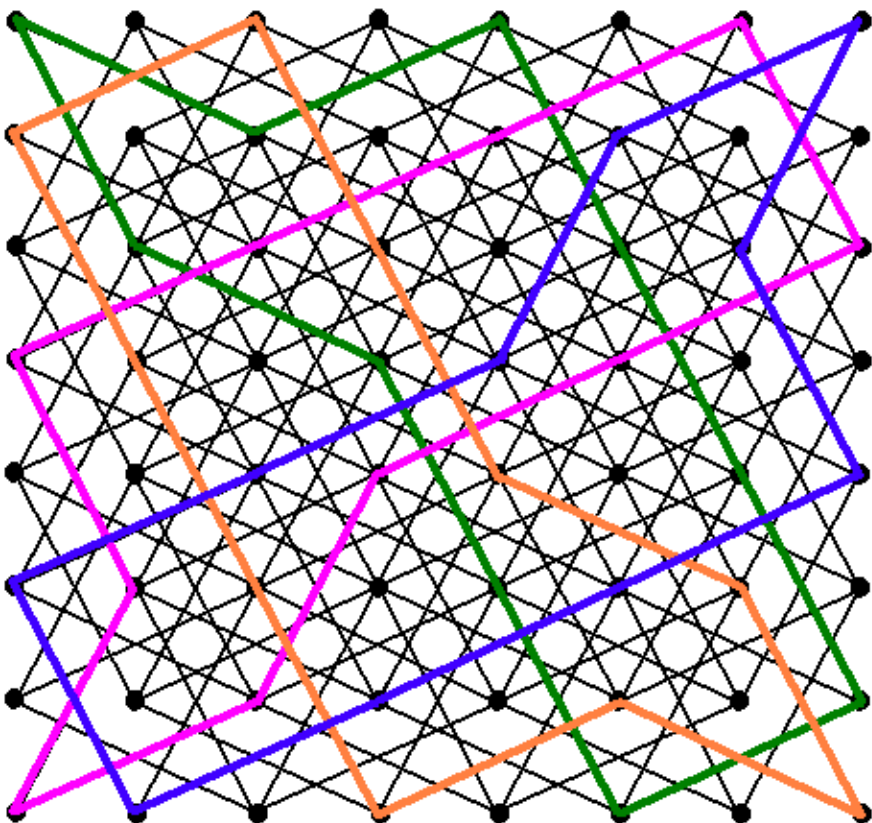
* 四個角都一樣



步驟二：

將四個格子作延伸。(方法還是不只一種，我做的是較容易看出的延伸)

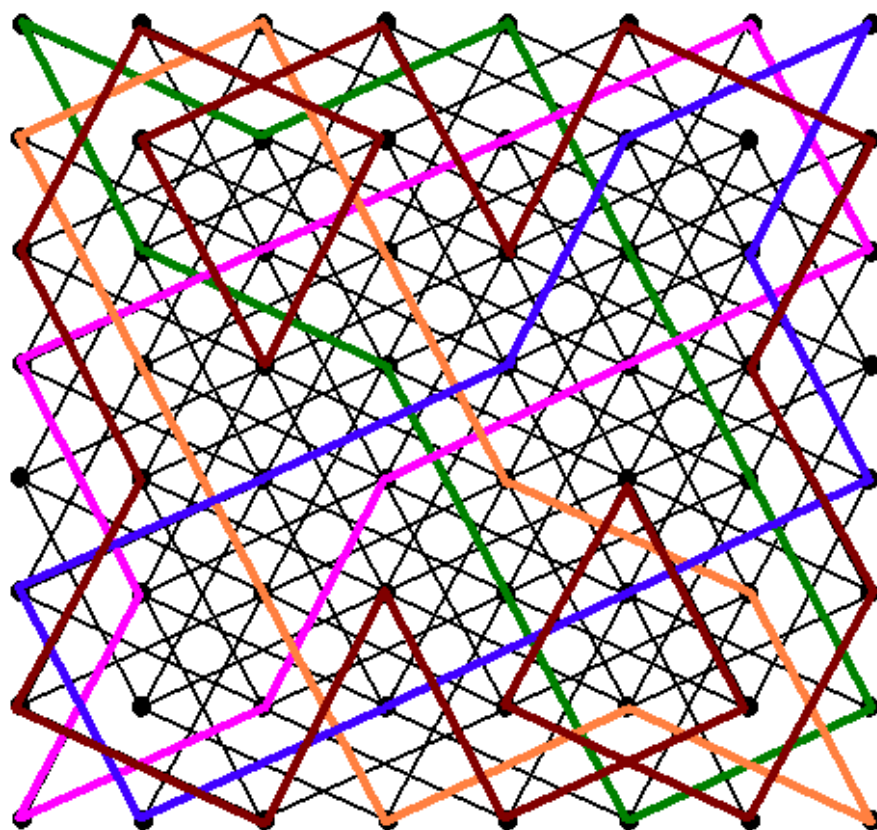
* 最好用不同顏色畫，才能明顯分出不同的圈



步驟三：

再畫格子(圖中畫的是咖啡色)，盡量用完所有點。

* 在步驟一到三，最好用最少的圈數，和最容易找的方法，畫完大部分的點

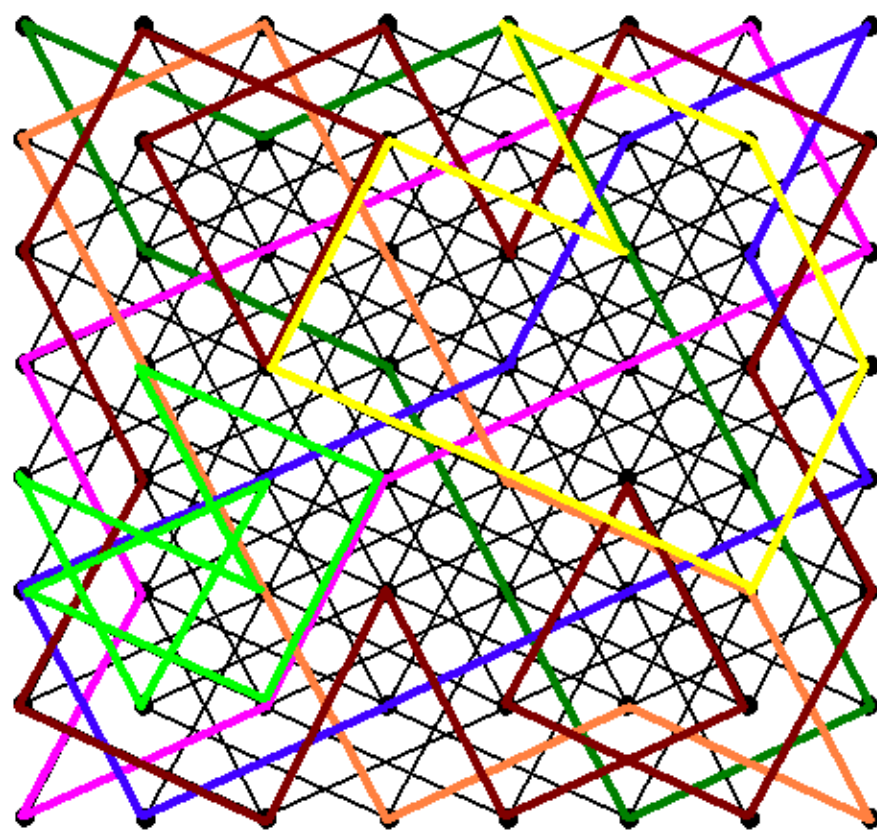


步驟四：

找出合併的圈(圖中是黃色和青色的圈)，合併的圈和每個被合併的圈相鄰的邊數只能是1(圖1-2 曾解釋)。

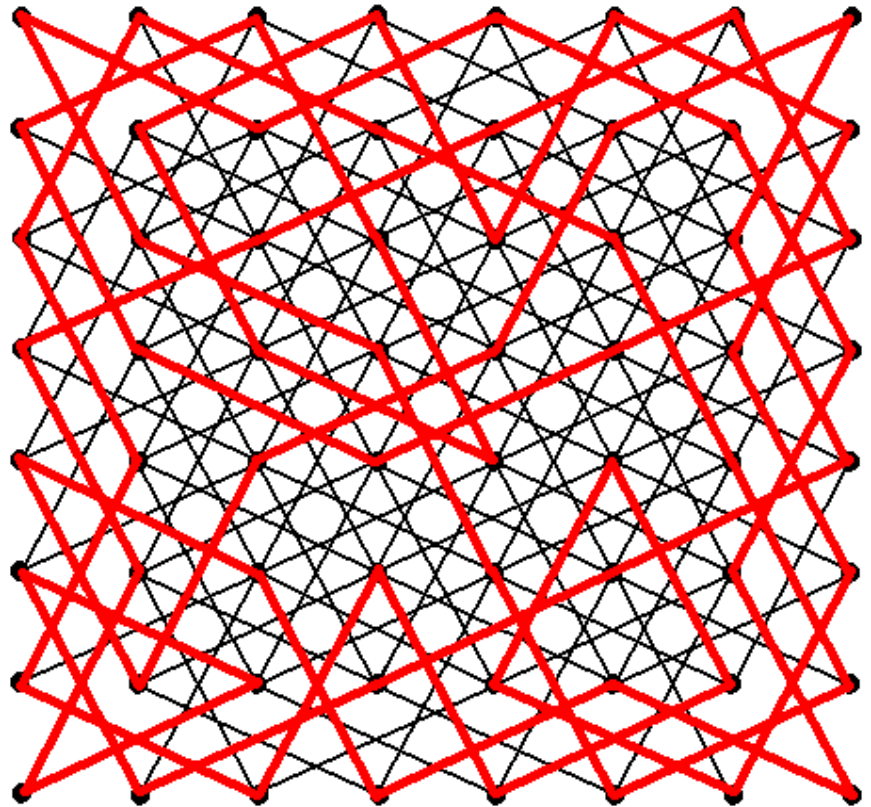
* 合併圈的個數沒有限定，只要把所有圈連接起來，不循環即可

* 圈連接示意圖：



步驟五：

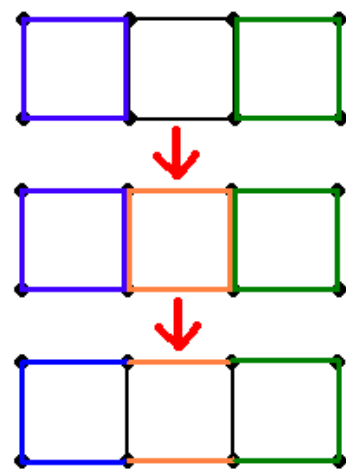
重複畫兩次的線段不要畫，其它的線段就是一筆劃遊歷



※上面的一筆劃遊歷換成步數的表示如下

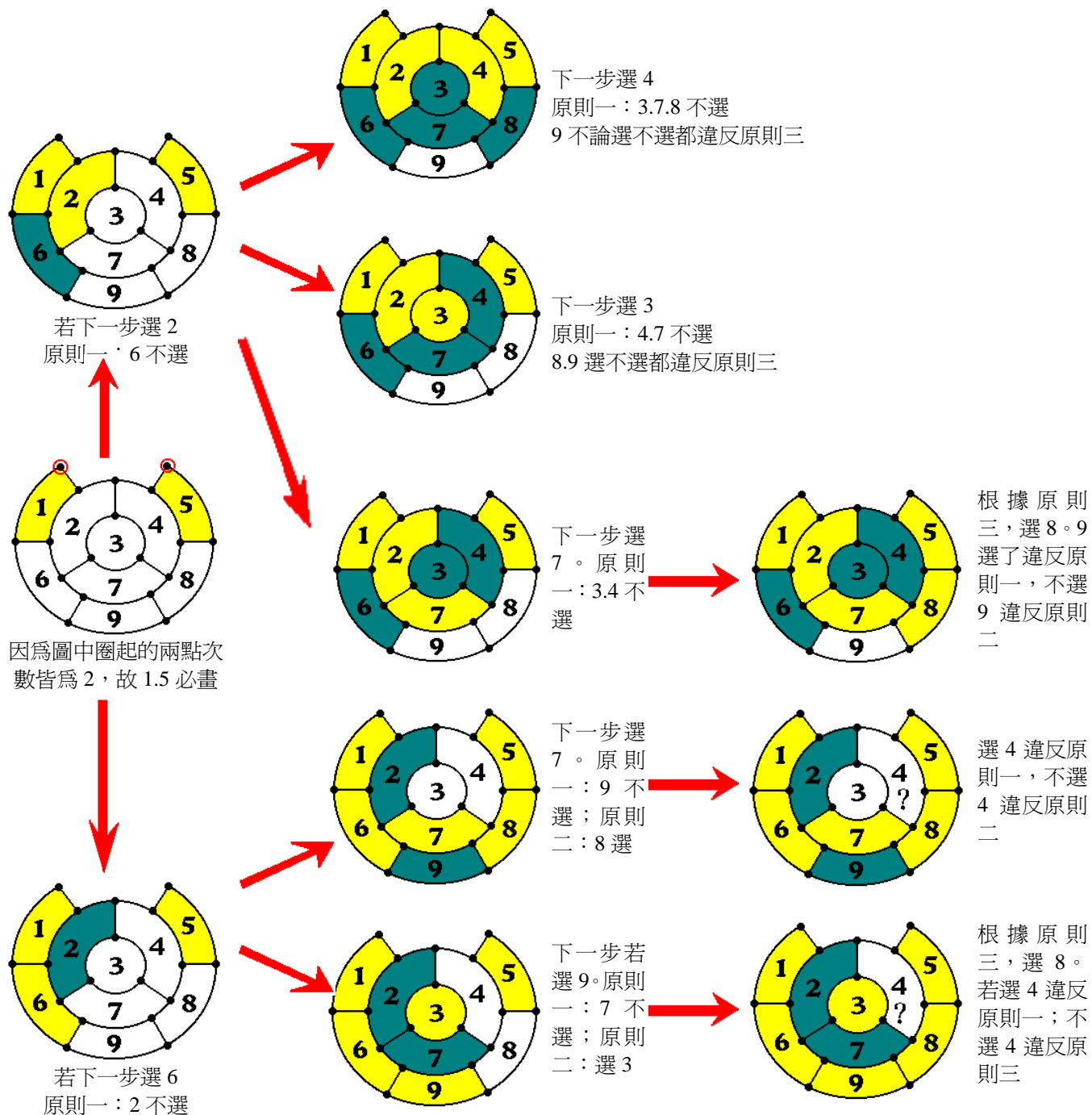
1	56	35	40	3	42	29	16
34	39	2	57	28	15	4	43
55	64	27	36	41	58	17	30
26	33	38	63	14	31	44	5
11	54	13	32	37	48	59	18
22	25	10	51	62	19	6	45
53	12	23	20	47	8	49	60
24	21	52	9	50	61	46	7

圖2



有些圖形較為複雜，可以從兩個圈甚至更多圈畫起，最後再來找出合併的圈。合併的圈一定要注意，與每個被合併的圈相鄰的邊只能是1；而且合併後不能成環(可以像步驟四，畫圖檢查一下)，否則都會違反原則一。【圖2】是合併的示意圖，藍圈和綠圈是被合併的圈，橘圈是合併的圈。

※用選格子方法證明「圖 2-31」無一筆劃遊歷的解



上面幾張圖說明了，選格子的方法還是得找出所有解才能證明無解，利用選格子來找解也是有可能選錯；但是選格子是以「格子」爲單位，格子的數目比線條還少，不管是求解或證明無解的過程，選格子的方法都會比畫線的方法還容易解出。至於第三章的漢米頓連結圖，書中也說明可以畫輔助線，再解一筆劃遊歷，這時選格子的方法也可以派上用場。

讀了這本書，讓人覺得數學不再那麼的枯燥乏味。作者利用淺顯易懂的圖形來解釋定理，訓練我們的思考邏輯，可以培養我們獨立思考和解題的能力及技巧。