數學報告———
數學的發現趣談

前言：其實這本書算是我第二本讀的，然而，選此書的原因，其實無他，就因為是發現趣談，想想，或許能從中得知數學有什麼幽默風趣的一面。剛開始讀時，的確是覺得「這本書不是很難」，但越是讀到後來，卻把我對「有趣」的定義給搞模糊了！因為有許多的符號和算法、定理我都不是很清楚，所以，也算是將就著能弄懂多少就弄懂多少吧！我盡力了，看來，往後仍需更加努力！

～～魔方陣～～

魔方陣這個東西，其實據說在古早以前就已經有我們的老祖先在研究了。最簡單的魔方陣，便是３×３的九方格。規則很簡單，只要將１～９的數字填入格中，使得在方格中的每一橫、每一豎、甚至每一斜排，其數字和都要相等。這樣看來，解題的方法倒是有很多種，但不管如何，天元（也就是正中心）放的絕對是五，而這是可以推論出來的。舉例來說：

X１	X２	X３
X４	X５	X６
X７	X８	X９

以此圖來看，我們可以得知幾個方程式：

X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7+X8+X9=45……………………………..(1)
X4+X5+X6=15..(2)
X2+X5+X8=15………………………………………………….(3)
X1+X5+X9=15………………………………………………….(4)
X3+X5+X7=15………………………………………………….(5)

同上式

(2)+(3)+(4)+(5)-(1)得

$3X_5=15$

故　$X_5=5$　　得解

至於四周呢？又該要如何安排？我們可以考慮到，由於去除天元後還剩下四個偶數，四個奇數，而又得知每一橫，每一列都要是１５（奇數），又從中發現，四個角落都屬於共用數（也就是橫排和列排都會用到），所以根據這個關係，會不難發現，四個角落都要是奇數：

2	X 2	6
X 4	5	X 6
4	X 8	8

6	X 2	8
X 4	5	X 6
2	X 8	4

以上圖只是排列方式四種中的兩種，但其實探討起來，終歸是同一種。

根據以上結果，我們很快便能破解此題：

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	1	8
7	5	3
2	9	4

那我們又想了，假如不一定要每一橫、每一列鄉家都爲１５的話，天元可不可以不爲５？於是我想我就證明看看：

已知　每一橫、每一列的數字和都是相同

又$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$

所以$X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7+X8+X9=45$

又$X1+X2+X3=X4+X5+X6=X7+X8+X9$

所以$X1+X2+X3=X4+X5+X6=X7+X8+X9=15$

於是　每橫排及每列排數字和皆爲１５........得證

再依照上頭算式所知，天元數字仍為５。
因此，我們會發現，在３×３的九方格魔方陣中，假如天元數字不為５的話，再怎麼樣排列，都不可能成功。
當然，魔方陣是有許多種的，並不一定就是九方格，而當遇上其他種－例如４×４、５×５、９×９甚至更大的話，那有其他的訣竅，我想，那仍是將來需努力去研究的。
另外，在書中有提到個問題：

已知 1,2,3 有

$1\times2\times3=1+2+3$ 的性質

試問：有沒有其他連續三整數擁有此性質？

這題其實也是簡單的，證明如下：

設此三整數為 $x-1, x, x+1$

則 $x(x-1)(x+1) = x+(x-1)+(x+1)$

$x(x^2-1) = 3x$

$x^3-x = 3x$

$x^3-4x = 0$

$x(x^2-4) = 0$

$x(x-2)(x+2) = 0$

所以 $x = 0$ or 2 or -2

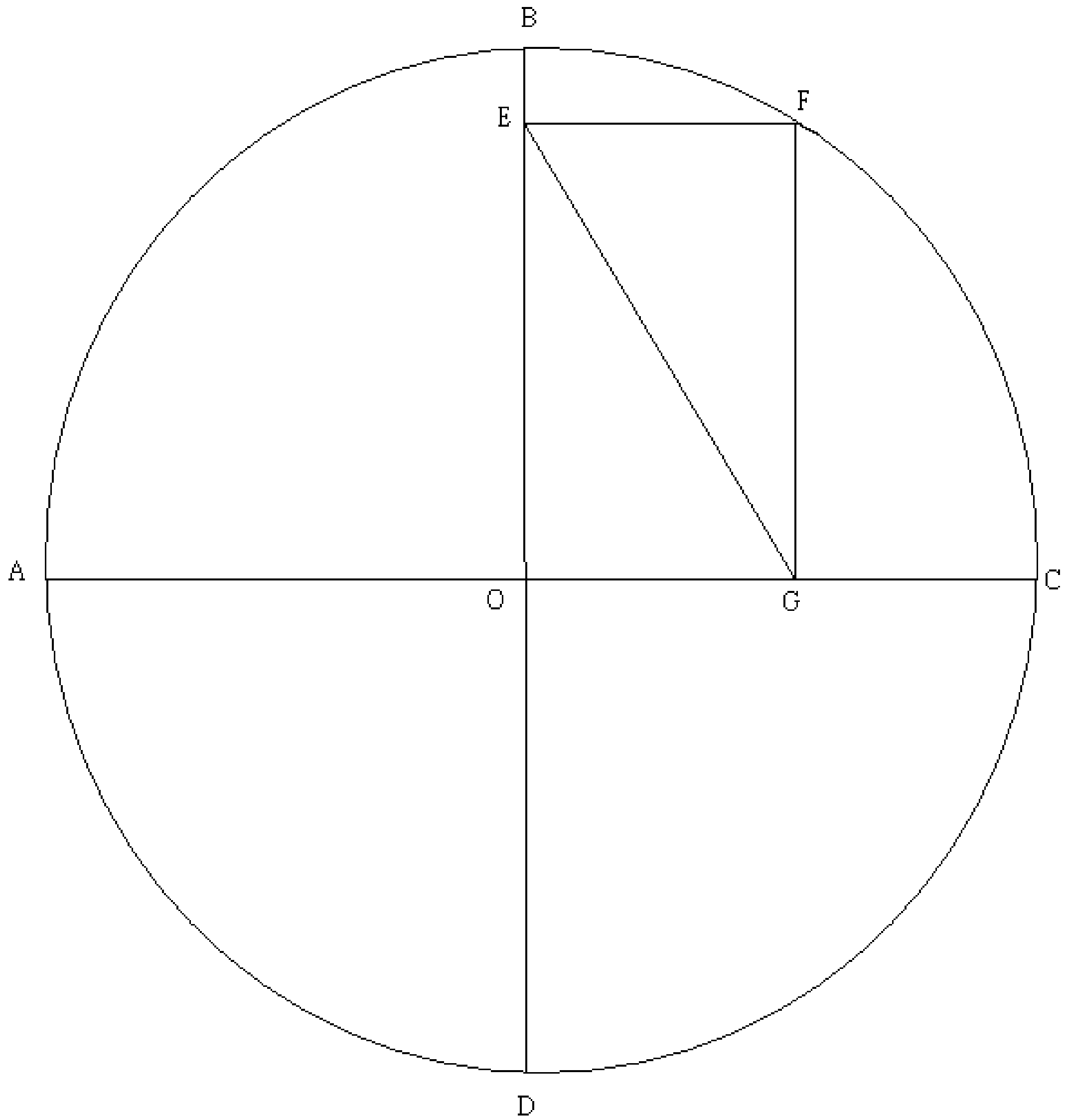
將 x=0，２，－２代入得到

中間數是為０，２，－２

因此有三組數 (1,2,3)、(-1,-2,-3)、(1,0,-1) 都是具有這樣的性質。

～～一線定乾坤～～

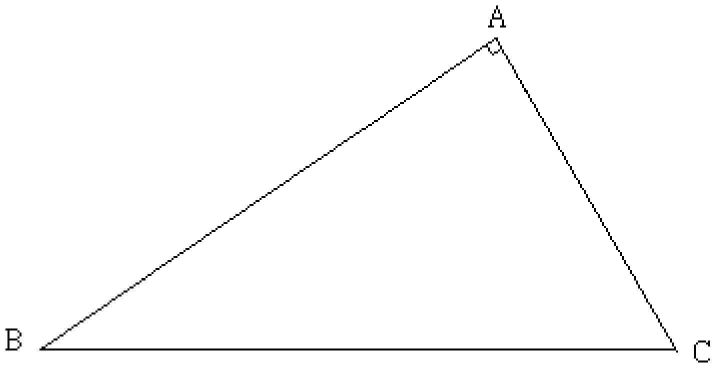
這所要說的是，作輔助線的重要。其實在幾何中，打轉久了，總會發現，在某些題形裡，並不是一眼就能看出問題的重點的及解題的方法。在這個時候，作個輔助線是極爲重要的。例如來說吧！舉個簡單的例子：



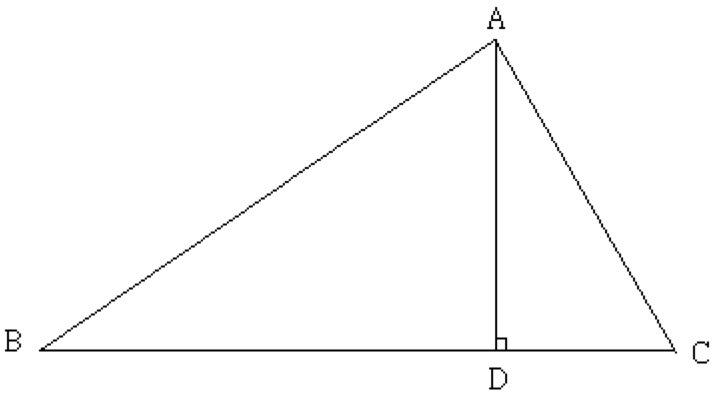
其中ＥＦ線段／／ＡＣ線段、ＦＧ線段／／ＢＤ線段
已知：圓的半徑是３
　求：ＧＥ線段＝？
以這題來說，最簡便且能一目了然的方法便是作ＧＥ線段，而 GE=OF=3
所以　　ＧＥ＝３……………………………………………………得解

這只是簡單的幾何問題，要想到這樣的方法其實也是容易的。但卻是挺重要且的確方便的。
在這，問題又來了。

問題一：利用相似三角形的道理，證明畢氏定理。
解：
　　先做一個任意直角三角形

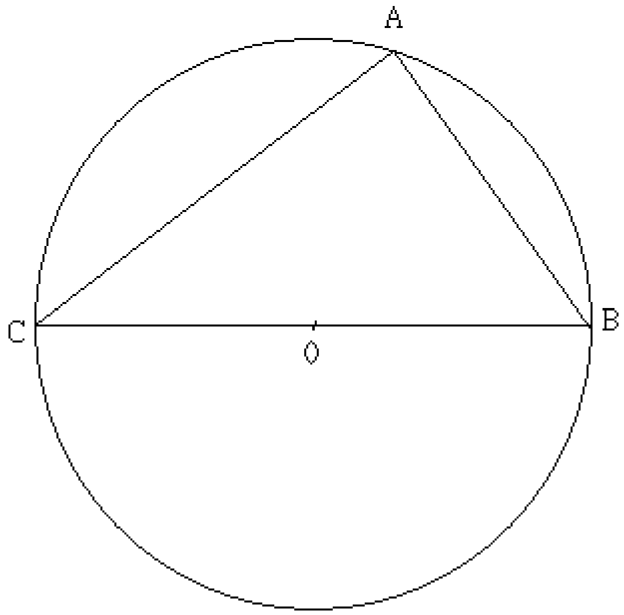


已知∠A＝９０°　△ABC 爲直角三角形
從∠A 作ＡＤ線段交ＢＣ線段於 D，如下圖

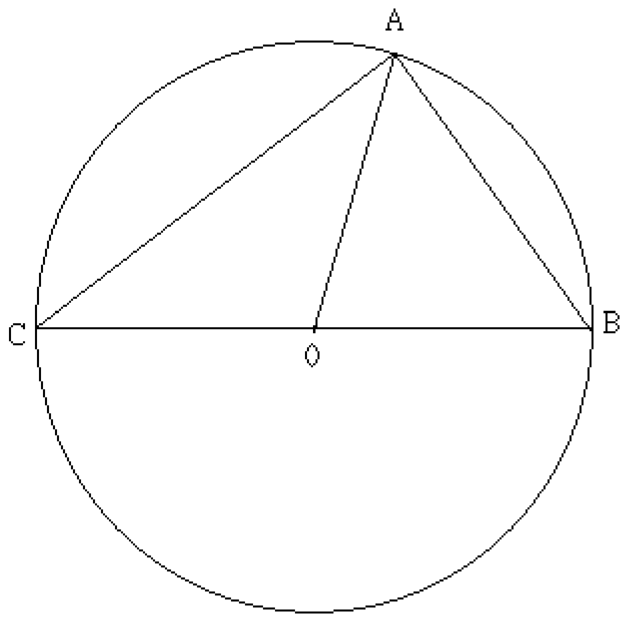


其中，△ABD～△ACD～△ABC
∵△ABD～△ABC
∴AB:BC=BD:AB　　,　　$AB^2=BC\times BD$⋯1
∵△ACD～△ABC
∴AC:BC=CD:AC　　,　　$AC^2=BC\times CD$…2
1+2 得
$AB^2+AC^2=BC\times BD+BC\times CD$
$\qquad\qquad=BC(BD+CD)$
$\qquad\qquad=BC\times BC$
$\qquad\qquad=BC^2$ ……………………………得證

問題二：試證泰利斯（Thales）定理：半圓的內接角爲直角，如下圖



證明：∠A＝９０°
　解：１、連 AO 線段



２、∵圓的半徑相等
　　∴AO=CO=BO
３、又∵AO=CO　∴∠OAC=∠OCA
４、又∵AO=BO　∴∠OAB=∠OBA
５、∵∠OAC=∠OCA　∠OAB=∠OBA
　　∴∠CAB=∠OAC+∠OAB=∠OCA+∠OBA=180°÷2=90°
…………………………………………………………………此題得證

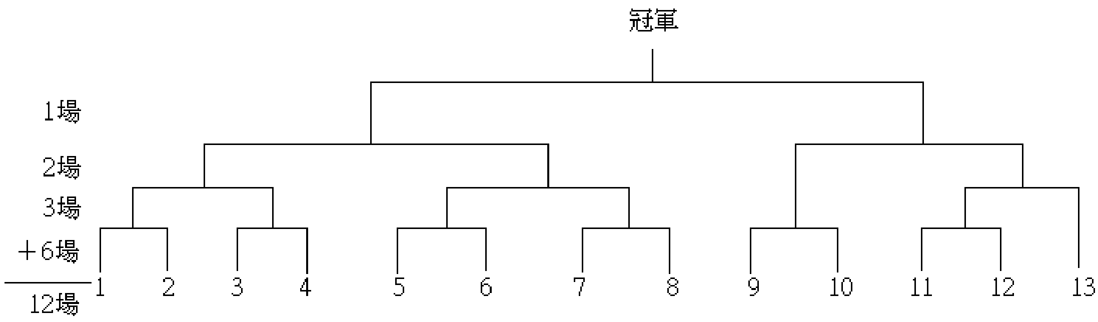
～～反向思考～～

在這一章中，我們要探討的，並不是數學要怎樣解，而是對於一個問題，我們是否能用另外一種思考模式來想它，而並不一定得就固定模式來求解。

譬如下面的例子吧！

在溫布頓網球賽中，假如規則是每輸一場就得要淘汰，而在一輪中，若沒對手的話，就直接進入下一輪，以此類推，直到冠軍產生，請問：假如參賽者有１３人，總共要比幾局？

我們先以最基本的「分類」來看吧！



總共要１２場。

那假如是２７個人呢？那比賽場數便是１３＋７＋３＋２＋１＝２６場

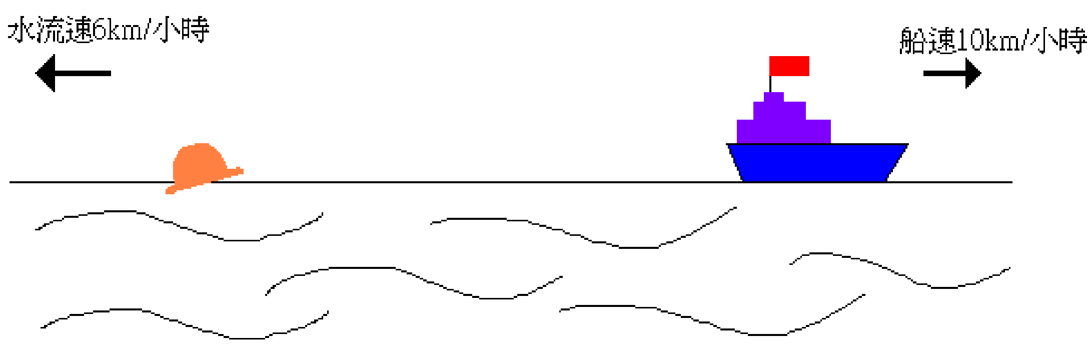
有沒有發現一個好玩的事？比賽場數剛好是（參賽人數－１），所以就想，是不是有更簡便的方法能快速得知比賽場數？而比賽場數跟參賽人數又有什麼關係呢？因此，我們換個角度想，假如要產生冠軍，便只能留下一個最後的贏家，而其他人都必須要淘汰，又每比一場就會淘汰一個，所以

比賽場數＝參賽人數－１……………………………………………………得證

由此題看來，的確，對於某種題型必須要換個角度想，會比較容易些。

馬上問題又來了！有兩個問題：

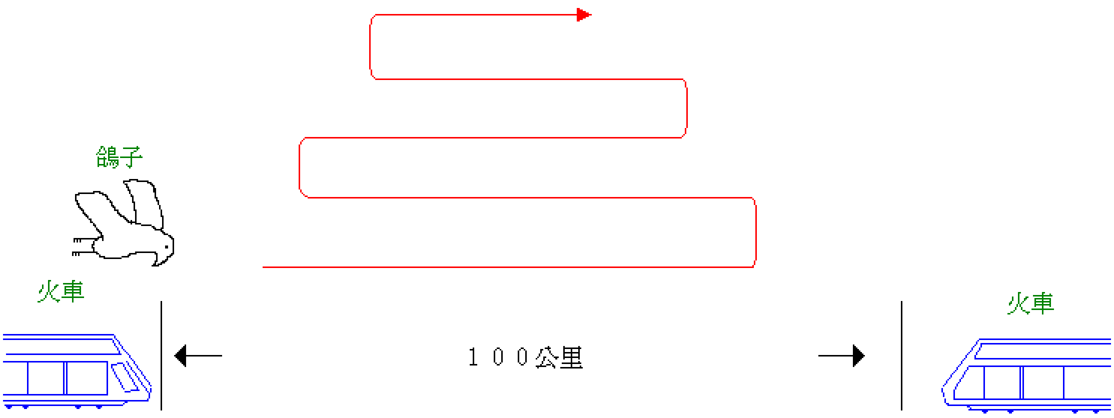
問題１：有一汽艇，在靜水中的速度是１０公里，在流速為６公里的河中逆流而上。其中有一個乘客的帽子掉落河中，半小時後才發覺，於是汽艇馬上掉頭（不計掉頭時間和加速度），請問需多久才能追上帽子？



解：

汽艇在逆流的水中行進，其速度為４公里
帽子掉落水中船行進半小時後與帽子的距離為１０×０.5＝５公里....①
汽艇在順流的水中行進，其速度為１６公里
汽艇在順流時追帽子的每小時追１６－６＝１０公里...................②
由①、②知
５÷１０＝０.5（小時）...............０.5 小時候能追上　　得解

問題 2：假設有兩輛對開的火車，相距１００公里，右列火車時速６０公里／時，左列火車４０公里／時。今有一隻鴿子，跟左列火車一起出發，之後在兩輛火車之間來回飛行。又假設鴿子的速度是８０公里／小時，並且反轉瞬間速度不變。當兩列火車相遇時，鴿子共飛了多少距離？



解：一般人在一看到這種題目時，大概第一個反應便是－把來回飛的距離一個一個算出來然後相加，其實，這題算是容易解的，也就是，換個角度想——
兩輛火車從開始到相遇時需費時１小時，也就是，鴿子飛了１小時。如此說來，我們便可知道鴿子飛了——
８０×1＝８０（公里）...得解

～～福爾摩斯法～～

在這一章中，我們要提到一個鼎鼎大名的偵探——福爾摩斯，而他偵辦兇手的方法便是，先列出可能是兇手的人，再將不可能是嫌疑犯的人排除，最後剩最後一個嫌疑犯，無論多麼不可能，但他一定是兇手。

但這方法確實有瑕疵，假如死者不是被殺兒是自殺呢？因此，在運用這個方法時，就必須要有「存在性」，所謂的存在性，便是指，在種種可能中，必然有一個是正確的，這樣福爾摩斯法才會行的通。

舉個問題作例子：

現在有三個人排成一直排，有五頂帽子，三頂是紅的，兩頂是綠的，每人各戴一頂，且每個人皆可以看到前面一個或前面兩個的帽子顏色，如第三個可以看到前兩個的，第二個可以看到前一個的，而排在最前頭的，便不能看任何人的。現在最後一個人說：「我無法確知我戴的帽子是什麼顏色。」第二個也說：「我也無法確知。」換到第一個了，他說，「我知道了！」他是怎麼知道的呢？

首先，我們可以做個表格來表示第一個人和第二個人所戴帽子可能的四種情形：

	第二個人	第一個人
1	綠	紅
2	綠	綠
3	紅	綠
4	紅	紅

因為綠色帽子只有兩頂，而當兩人戴帽情況為（綠，綠）時，第三人必然知道他自己戴的帽子是紅色，但他卻說不知，可見兩人所戴帽子不可能為（綠，綠）；假如第一個人所戴的帽子為綠的話，在排除（綠，綠）的情況下，第二個便會知道他自己戴的是紅帽，但第二個人卻說不知道，可見第一個人戴綠帽的情況已經完全排除，那麼，他便是戴紅帽了。

接著又一個問題來了！假如現在帽子一樣是五頂，同樣是三紅兩綠，但改變方式，變成三個人可以互相看見另外兩個的帽色，而在這樣的情況，第二個人和第三個人又都說不知道，則三人的情況可以如下：

	第一個人	第二個人	第三個人
1	綠	紅	紅
2	紅	綠	紅
3	紅	綠	綠
4	紅	紅	綠
6	紅	紅	紅

看到上面的表格，相信各位會不禁懷疑，排列方式應該不只這些吧！沒錯，只是當第一個人戴綠帽時，第二個人和第三個人便不能戴綠帽，說明如下：

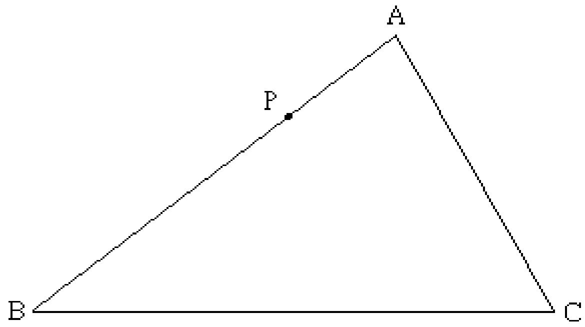
第一和第二戴綠帽——第三個人戴紅帽.........違反題意

第一和第三戴綠帽——第二個人戴紅帽……….違反題意
這樣看來，第一個人能夠帶綠帽的情況只剩下一種，我們再來分析，假如第一人綠帽的情況行或不行？分析如下：
第一個人戴綠帽，而第二個人一定是戴紅帽，不可能戴綠帽，但他卻說「不知道」，可見第一個人不可能戴綠帽，一定是戴紅帽………………………………得證
再來，又是一個變形題：
現在變成是三張撲克牌，其中有兩張黑的，一張紅的，讓三個人各拿一張，然後猜所有人的牌色。
其中，第一個人看了看然後說：「我不知道」，第二個人聽了後馬上說：「假如我原先也是不知道的，既然你說不知道，那我就知道了。」請問：三個人的牌色各是什麼？
解：既然第一個人不知道的話，那他一定是拿紅色。
　　而第二個人原先也不知道，那他拿的也是紅色。
　　既然如此，第三個人拿的是黑色。………………………………………得證
由此可知，所謂的福爾摩斯法對於規納及分類的問題確實是相當的好用，但並非所有情況皆適用，就向上頭所說的，假如死者是自殺，那便沒有兇手了。因此，要用用此方法，便必須要有存在性作爲前題，然後才能運用。

在這一章節中，我要空些位置來解書上所附的一些練習題，其實都不是很難的題目，因為真正對我來說算難的類題，我都不會做，更別說在報告中解了。因此，我敢附上的，必是不甚難的題。

雖然不難，但我還是要解解看：

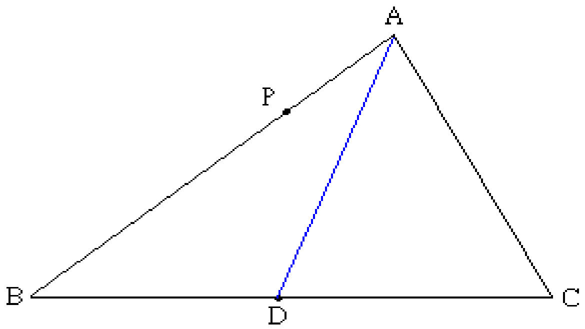
問題一：如下圖△ABC 中，AB 線段上，已知一點Ｐ，求：過點Ｐ做一直線將△ABC 的面積分成兩等份。



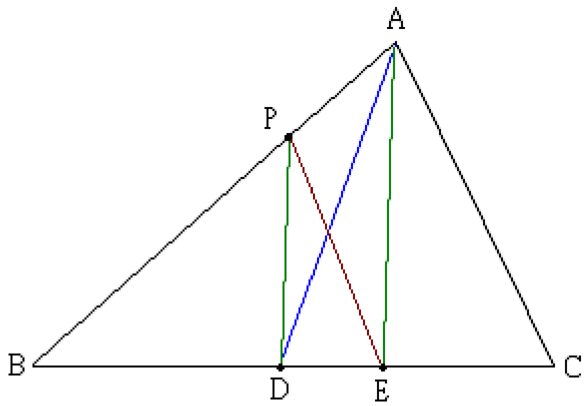
做法：

１、　先思考有哪些方法能夠將三角形的面積分成兩等份？

過Ａ點作中線ＡＤ交ＢＣ線段於Ｄ，則△ＡＢＤ＝△ＡＣＤ



２、連ＰＤ線段，過Ａ做ＡＥ線段／／ＰＤ線段交ＢＣ線段於Ｅ，連ＰＥ線段，ＰＥ線段即為所求



證明：

∵ＰＤ／／ＡＥ　∴△ＡＰＤ＝△ＥＰＤ（同底等高）

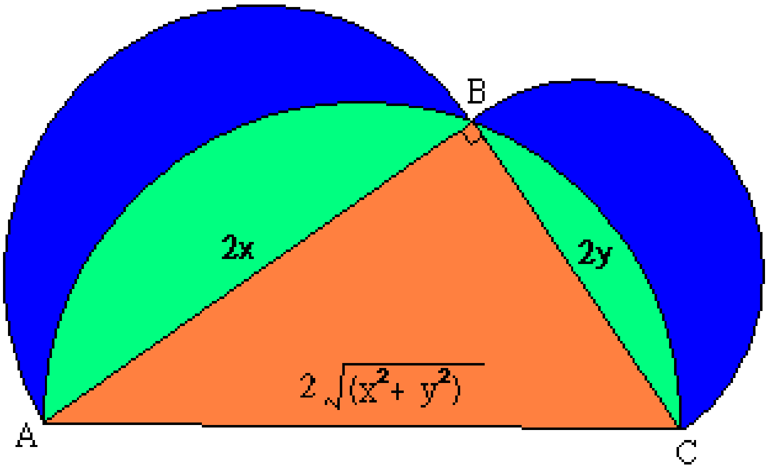
又△ＢＰＥ＝△ＰＤＥ＋△ＢＰＤ

＝△ＡＰＤ＋△ＢＰＤ

＝△ＡＢＤ

$=\frac{1}{2}$△ＡＢＣ……………………………………得證

問題二：設△ＡＢＣ爲直角三角形，在三邊上做半圓，如下圖。試證：兩個月牙形（藍色面積）和會等於△ＡＢＣ的面積？



證明：爲了方便計算，我們先設ＡＢ線段、ＢＣ線段長各爲２ｘ、２ｙ，則

ＡＣ線段^2＝$4x^2+4y^2$

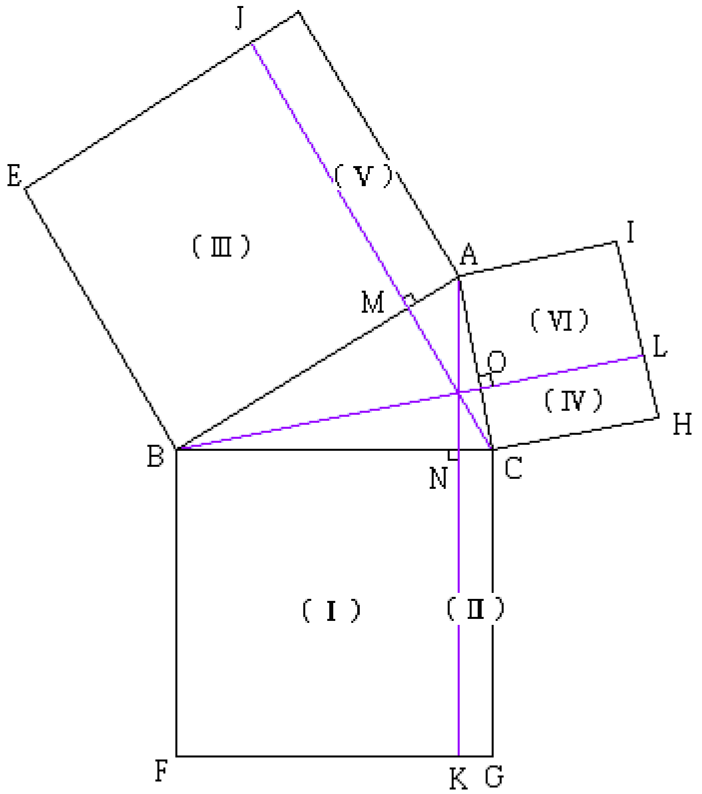
ＡＣ線段＝$\sqrt{4(x^2+y^2)}=2\sqrt{(x^2+y^2)}$

藍色月牙形面積＝ＡＢ半圓＋ＢＣ半圓＋△ＡＢＣ－ＡＣ半圓

$=\frac{x^2}{2}\pi+\frac{y^2}{2}\pi+2xy-\frac{x^2+y^2}{2}\pi=2xy$

＝△ＡＢＣ……………………………得證

問題三：如下頁圖：已知一三角形及以三邊作爲正方形的一邊作三個正方形，試證（Ⅰ）＝（Ⅲ），（Ⅱ）＝（Ⅳ）



證明：

１、連ＣＥ線段及ＡＦ線段

在△ＡＢＦ與△ＥＢＣ中

∵ＡＢ線段＝ＢＥ線段（正方形的兩邊）

　ＢＣ線段＝ＢＦ線段（同上）

　∠ＥＢＣ＝∠ＡＢＣ＋９０°＝∠ＡＢＦ

∴△ＡＢＦ≅△ＥＢＣ（ＳＡＳ）

２、又（Ⅲ）＝２△ＥＢＣ（同底等高）

　（Ⅰ）＝２△ＡＢＦ（同底等高）

∴（Ⅲ）＝２△ＥＢＣ

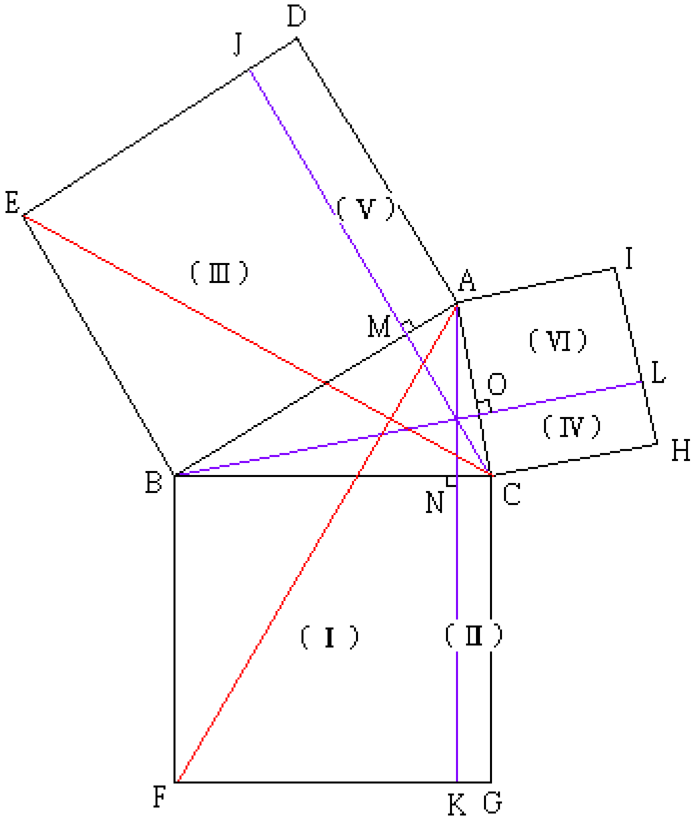
　　　　＝２△ＡＢＦ

　　　　＝（Ⅰ）……………………………………得證

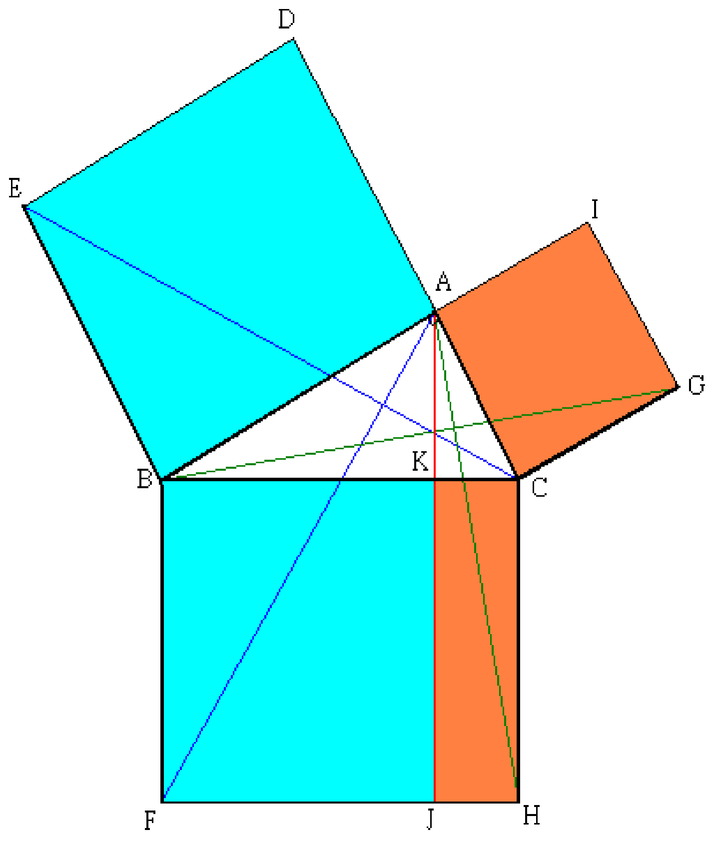
３、同理可證

（Ⅱ）＝（Ⅳ），（Ⅴ）＝（Ⅵ）

圖解如下：



由這個方法來說，我們也可以證明畢氏定理，證明如下：



已知：△ＡＢＣ為直角三角形，且∠Ａ＝９０°，以三邊長為邊，各做一個正方形，如上頁圖。

連ＣＥ線段、ＡＦ線段（以藍線所示）

在△ＡＢＦ與△ＥＢＣ中

∵ＡＢ線段＝ＢＥ線段（正方形的邊長）

ＢＣ線段＝ＢＦ線段

∠ＥＢＣ＝∠ＡＢＣ＋９０°＝∠ＡＢＦ（已證）

∴△ＡＢＦ≅△ＥＢＣ（ＳＡＳ）

又正方形ＡＢＥＤ＝２△ＥＢＣ（同底等高）且

長方形ＢＦＪＫ＝２△ＡＢＦ

∴正方形ＡＢＥＤ＝２△ＥＢＣ

＝２△ＡＢＦ

＝長方形ＢＦＪＫ

同理可證，正方形ＡＥＧＣ＝長方形ＫＪＨＣ

BC^2＝長方形ＢＦＪＫ＋長方形ＫＪＨＣ

＝正方形ＡＢＥＤ＋正方形ＡＥＧＣ

＝AB^2+AC^2……………………………得證

～～感想～～

當然，以直角三角形之兩股的平方和＝斜邊的平方（畢氏定理）來說，其證法據說已有３７０種以上！那真是挺可觀的！對於一種定律，能以不同的方式來思考，來解題，對於往後的學習，莫不是有莫大的助益！於是我們便要了解，有時候，當我們已知一種題目的解答時，能不能夠再以另外一種方式，來求這個題目的解，所謂「一題多解」，也就是這樣的。尤其是幾何題，那解題方式以及解題技巧更是多元，不僅是解題而已，更要解的清楚，解的漂亮！未來，這或許是我們要努力的目標吧！除了思考，對於同樣類型的題目，總是需要多演練，才能夠熟析，在這一部分，我想，三角函數或許是最好的例子。因此，說來說去，仍然是多接觸、多思考，或許才是穩健的方法。