No.________

數學讀書心得

其實我在國中就有讀過從正五邊形談起，我在讀那本之前就知道斐波那契數列的通項公式的推法，但其它的有關的公式都不太有興趣，但我那時（大概國三）就想證明那些公式，書中列出七項公式，我就想自己推公式，而不是用數學歸納法邊看邊證，我覺得用數學歸納法是偷看過公式的投機行為，所以我推出的式子有：

① $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$

② $\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$

③ $\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$

④ $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$

⑤ $F_n^2 = F_{n+1} \times F_{n-1} + (-1)^{n+1}$

⑥ $F_m \mid F_{mn}$，$F_n \mid F_{mn}$

⑦ $(F_n, F_{n-k}) = (F_n, F_k)$

⑧ $\sum_{k=1}^{n} F_k^3 = \frac{1}{2}(F_n^3 + 3F_n^2 F_{n-1} - F_{n-1}^3 + 1)$

⑨ $\sum_{k=1}^{n} F_{k-1} F_k = F_n^2 + \frac{(-1)^n - 1}{2}$

⑩ $\sum_{k=1}^{n} F_{k-2} F_{k-1} F_k = \frac{1}{2}(F_n^3 - F_{n-2} F_{n-1} F_{n+1} - 1)$

2'8 15 林永鴻

其中①到⑤是看書才想證，⑥到⑧是臨時的想法，其中我覺得⑧比其它難，我是因為④才想證⑧，而⑨是④證出時的附帶品，⑩是⑧證出時的附帶品，我把證明過程和這篇交起來，證明過程才是重點！

還有一本最近向同學借的書—用漫畫來學幾何，裡面有介紹幾何史、非歐幾何等簡單觀念以及一些幾何題的證明如巴斯卡定理，但我對裡面提到的費馬猜想（現已成定理）有興趣，雖有人證明，但我想練一下這方面的技巧，於是自行證明$n=3$ $n=4$的情況以及$n=2$整數解的一些性質。

我把式子都交在這張後面，可能會有我沒注意到的錯誤或描述不清的地方。那就只好敬請原諒。

真善美

218 18 林永鴻

台北市立建國高級中學臨時測驗用紙

學科　　班級　　姓名　　積分號

$x^2+y^2=z^2$ …①

若 $(x,y)=d_1$ 則 $x=d_1a$　$y=d_1b$　$(a,b)=1$　$a^2+b^2=(\frac{z}{d_1})^2$　$d_1|z$ 令 $z=d_1c$

$a^2+b^2=c^2$　若 $(a,c)=d_2$ 令 $a=d_2a_1$，$c=d_2c_1$　$(\frac{b}{d_2})^2=c_1^2-a_1^2$　$d_2|b$

$\because d_2|a$，$d_2|b$，$(a,b)=1$ $\therefore d_2=1 \Rightarrow a、b、c$ 兩兩互質

$\because$ $a、b、c$ 兩兩互質，且由 $a^2+b^2=c^2$ $\therefore$ $a、b、c$ 必為兩奇一偶

化①式為 $(a+b+c)(a+b-c)=2ab$ …②　$\because a、b、c$ 中兩奇一偶

$\therefore 2|(a+b+c)$，$2|(a+b-c) \Rightarrow 4|(a+b+c)(a+b-c) \Rightarrow 4|2ab$　$2|ab$　$\because a、b、c$ 兩奇一偶

$\therefore$ c 為奇數 且可設 b 為偶數 a 為奇數

$\because (c+a)、(c-a)$ 為偶數 $\therefore$ 可設 $c+a=2d_3r_1$　$c-a=2d_3r_2$　$(r_1,r_2)=1$　$(c+a,c-a)=2d_3$

則 $c=d_3(r_1+r_2)$　$a=d_3(r_1-r_2) \Rightarrow d_3|(a,c)$　$d_3|1$　$d_3=1$　$(c+a,c-a)=2$

$2|b$ $\therefore$ 令 $b=2mn$　$(\frac{c+a}{2})(\frac{c-a}{2})=m^2n^2$　可令 $\frac{c+a}{2}=m^2$　$\frac{c-a}{2}=n^2$ 其中 $(m,n)=1$　$(m^2,n^2)=1$

則 $c=m^2+n^2$　$a=m^2-n^2$　於是得出 $\begin{cases} a=m^2-n^2 \\ b=2mn \\ c=m^2+n^2 \end{cases}$　$(m,n)=1$ ……③

若 $m、n$ 奇偶性相同，則 $2|a$，$2|c$，不合，故 $m、n$ 為一奇一偶，故 $2|mn$

$4|2mn \Rightarrow 4|b$

設 $m、n$ 除以3餘數為 $p_1、p_2$　$m=3m_1+p_1$　$n=3n_1+p_2$

$p_1、p_2=0、1、2$

$\frac{1}{2}ab=mn(m+n)(m-n)=(3m_1+p_1)(3n_1+p_2)[3(m_1+n_1)+(p_1+p_2)][3(m_1-n_1)+(p_1-p_2)]$

(p_1,p_2)	0	0	0	1	1	2
	0	1	2	1	2	2
p_1+p_2	0	1	2	2	3	4
$\lvert p_1-p_2\rvert$	0	1	2	0	1	0

(一) (二) (三) (四) (五)

由左表可知(一)到(五)組每組至少有一數為3的倍數，故 $m、n、(m+n)、(m-n)$ 至少有一數為3的倍數，$3|\frac{1}{2}ab \Rightarrow 6|ab$

設 $m、n$ 除以5的餘數分別為 $k_1、k_2$

$\frac{1}{2}abc=mn(m+n)(m-n)(m^2+n^2)$

$m=5m_2+k_1$　$n=5n_2+k_2$　$k_1、k_2=0、1、2、3、4$

$\frac{1}{2}abc=(5m_2+k_1)(5n_2+k_2)[5(m_2+n_2)+(k_1+k_2)][5(m_2-n_2)+(k_1-k_2)][25(m_2^2+n_2^2)+10(m_2n_2)+(k_1^2+k_2^2)]$

(k_1,k_2)	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4
	0	1	2	3	4	1	2	3	4	2	3	4	3	4	4
k_1+k_2	0	1	2	3	4	2	3	4	5	4	5	6	6	7	8
$\lvert k_1-k_2\rvert$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0
$k_1^2+k_2^2$	0	1	4	9	16	2	5	10	17	8	13	20	18	25	32

每組都有5的倍數

故 $5|\frac{1}{2}abc$

$5|abc$

$60|abc$

台北市立建國高級中學臨時測驗用紙

學科　　　班級　　　姓名　　　積分號

$x^3+y^3=z^3 \cdots ①$　求非0整數解

令 $(x,y)=k_1$　則 $x=k_1a$　$y=k_1b$　$(a,b)=1$　$a^3+b^3=\left(\frac{z}{k_1}\right)^3$　$k_1|z$

則 $z=kc$　$a^3+b^3=c^3$　若 $(a,c)=k_2$ 則 $a=k_2a_1$　$c=k_2c_1$　$(c_1^3-a_1^3)=\left(\frac{b}{k_2}\right)^3$

$k_2|b$　$\because (a,b)=1$　$\therefore k_2|1$　$k_2=1$　$(a,c)=1$　則 $(b,c)=1$

$a^3+b^3=c^3$　$\because (a+b-c)^3=(a^3+b^3-c^3)+3a^2b-3a^2c+3ab^2+3bc^2-3b^2c-6abc+3ac^2$

$=3(a^2b-a^2c+ab^2+bc^2-b^2c+ac^2-2abc) \cdots ②$

$\because a^3+b^3-c^3=0$　$\therefore (a+b-c)^3=3(a^2b-a^2c+ab^2+bc^2-b^2c+ac^2-2abc)$

$3|(a+b-c)$　令 $(a+b-c)=3k_3$　$27k_3^3=3(a^2b-a^2c+ab^2+bc^2-b^2c+ac^2-2abc)$

$9k_3^3=abc+(ab-bc-ac)(a+b-c)$　$\because 3|(a+b-c)$　$\therefore 3|abc$

$9k_3^3+c(a+b-c)^2=abc+(a+b-c)(ab-c^2) \cdots ③$　設 $a、b、c$ 除以3的餘數分別為 $p、q、r$

$\because 3|(a+b-c)$　$\therefore (p,q,r)=(0,0,0)、(0,1,1)、(0,2,2)、(1,0,1)、(1,1,2)、(1,2,0)、(2,0,2)、(2,1,0)、(2,2,1)$　又 $\because 3|abc$　$\therefore (p,q,r)=(0,0,0)、(0,1,1)、(0,2,2)、(1,0,1)、(1,2,0)、(2,0,2)、(2,1,0)$ 七組　又 $a、b、c$ 兩兩互質 所以 $(0,0,0)$ 不合，所以 (p,q,r) 只有六組

六組的 $(ab-c^2)$ 除以3的餘數分別為 $2、2、2、2、2、2$

$\therefore (ab-c^2)$ 除以3餘2　$\because (a+b-c)^2$ 是9的倍數 且 $3\nmid(ab-c^2)$

$(ab-c^2)$ 除以3的餘數均為2

由 $9k_3^3+c(a+b-c)^2=abc+(a+b-c)(ab-c^2) \cdots ④$　可知 若 $9|abc$ 則 $9|(a+b-c)$ 且若 $9|(a+b-c)$

則 $9|abc$　若 $9\nmid abc$ 則 $9\nmid(a+b-c)$ 且若 $9\nmid(a+b-c)$ 則 $9\nmid abc$

化①式為 $(a+b-c)[(a+b)(a+b-c)-(ab-c^2)]=3abc \cdots ⑤$

$\because 9|(a+b-c)$　$\therefore 9|abc$

$\because 3\nmid[(a+b)(a+b-c)-(ab-c^2)]$　且 $9|3abc$　$\therefore 9|(a+b-c)$

$\because 9|abc$　$\therefore 27|(a+b-c)$，可令 $(a+b-c)=3^3k_4$

$\because$ 由③　$3^8k_4^3+c\,3^6k_4^2=abc+3^3k_4(ab-c^2)$　$\therefore 3^3|abc \Rightarrow 3^4|(a+b-c)$ (由⑤)

設若 $3^n|(a+b-c)$　令 $(a+b-c)=3^nk$

$\because$ 由③　$3^{3n-1}k^3+c\,3^{2n}k^2=abc+3^n(ab-c^2)$　$\therefore 3^n|abc$

由⑤　$(a+b-c)[(a+b)(a+b-c)-(ab-c^2)]=3abc$

$\because 3\nmid[(a+b)(a+b-c)-(ab-c^2)]$ 且 $3^{n+1}|3abc$　$\therefore 3^{n+1}|abc$

$\because 3^4|(a+b-c)$　$\therefore 3^5|(a+b-c) \cdots \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty}3^n\right)|(a+b-c)$

$\because |a|\neq|b|\neq|c|\neq0$　$\therefore a+b-c\neq0$　$a+b-c\geq\lim_{n\to\infty}3^n$　$\because \lim_{n\to\infty}3^n$ 發散為無窮大

$\therefore$ ①式沒有非0整數解

台北市立建國高級中學臨時測驗用紙

學科　　班級　　姓名　　積分號

求 $x^4+y^4=z^4$ 的整數解

令 $x=ad_1$　$y=bd_1$　$(a,b)=1$　$a^4+b^4=(\frac{z}{d_1})^4$　$d_1|z$，於是 $z=d_1c$

若 $(a,c)=d_2$ 可令 $a=d_2a_1$　$c=d_2c_1$　$c_1^4-a_1^4=(\frac{b}{d_2})^4$　$d_2|b$

∵ $d_2|a$，$d_2|b$ ∴ $d_2|(a,b) \Rightarrow d_2=1$　a.b.c 兩兩互質

$(a^2)^2+(b^2)^2=(c^2)^2$ 由二次參數解可知定有 m.n 使下式成立

$$\begin{cases} a^2=m^2-n^2 \\ b^2=2mn \quad (m,n)=1 \\ c^2=m^2+n^2 \end{cases}$$

令 $2|b$、$2\nmid a$、$2\nmid c$

$c^2-a^2=2n^2$　$(c+a)(c-a)=2n^2$

令 $c+a=dp$　$(p,q)=1$　$(c+a,c-a)=d$

$c-a=dq$　$d>0$

$2c=d(p+q)$　$2a=d(p-q)$　∵ $(a,c)=1$ ∴ $(2a,2c)=2$

$(d(p+q),d(p-q))=2$　$d|2$

$d=1$ or 2　$d^2pq=2n^2$

若 $d=1$　$c+a=p$　$c-a=q$　p.q 奇偶性相同 ∵ $pq=2n^2$ ∴ $2|pq$

∵ $2|pq$ ∴ p.q 必有一數為偶數 又∵ p.q 奇偶性相同 ∴ $2|p$、$2|q$

$2|(p,q)$ 與 $(p,q)=1$ 矛盾

若 $d=2$　$4pq=2n^2$　$2pq=n^2$　$2|n^2 \Rightarrow 2|n$　令 $n=2n_1$

$4n_1^2=2pq$　$pq=2n_1^2$　∵ $2|pq$，∴ p.q 必有一數為偶數

又∵ p.q 奇偶性相同 ∴ $2|p$、$2|q$ $\Rightarrow$ $2|(p,q)$ 又 $(p,q)=1$，矛盾

故 $a^2+2n^2=c^2$ 沒有非0整數解，故 $a^4+b^4=c^4$ 也沒有非0整數解

斐波那契數列

①　1、1、2、3、5、8 ‥‥

a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6 ‥‥

$$\begin{cases} a_n + a_{n+1} = a_{n+2} \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases}$$

令 $a_n = x^n$　　$x^n + x^{n+1} = x^{n+2}$　　$x^2 - x - 1 = 0$　　$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ or $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ or $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ (符合 $a_n + a_{n+1} = a_n$)

可令 $a_n = m\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ (符合 $a_n + a_{n+1} = a_n$)

把 $a_1 = a_2 = 1$ 代入

$$\begin{cases} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)m + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)n = 1 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{matrix}$$

代入 $a_n = m\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$ ‥‥ a_n 通項

②　$=\alpha \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \beta$

$\alpha + \beta = 1$　　$\alpha^2 + \beta^2 = 3$

$\alpha - \beta = \sqrt{5}$　　$\alpha^n + \beta^n = (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) + (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2})$

$\alpha\beta = -1$　　$\alpha^n + \beta^n$ 為整數

1、3、4、7、11、18、29 ‥‥

b_1、b_2、b_3、b_4、b_5、b_6、b_7 ‥‥

$b_n + b_{n+1} = b_{n+2}$

$\alpha^n + \beta^n = b_n$

$$a_n^2 = \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}\left(\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n\right)$$

$$a_{n-1}a_{n+1} = \frac{1}{5}\left(\alpha^{2n} + \beta^{2n} - (\alpha\beta)^{n-1}(\alpha^2 + \beta^2)\right)$$

$$a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = \frac{1}{5}\left(2(\alpha\beta)^n - (\alpha\beta)^{n-1}(\alpha^2 + \beta^2)\right) = \frac{1}{5}\left(2\times(-1)^n + (-1)^n \times 3\right) = (-1)^n$$

$a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + (-1)^n$ ‥‥ 關係式

令 $m \geq n$，$k \geq 0$

$$a_{n-k}a_{m+k} = \frac{1}{5}\left[(\alpha^{m+n} + \beta^{m+n}) - (\alpha\beta)^{n-k}(\alpha^{m-n+2k} + \beta^{m-n+2k})\right]$$

$$a_n a_m = \frac{1}{5}\left[(\alpha^{m+n} + \beta^{m+n}) - (\alpha\beta)^n(\alpha^{m-n} + \beta^{m-n})\right]$$

$$a_{n-k}a_{m+k} - a_n a_m = \frac{1}{5}\underbrace{\left[(-1)^n b_{m-n} - (-1)^{n-k} b_{m-n+2k}\right]}_{\text{整數}}$$ ‥‥ 關係式

③

$a_1=a_2 \rightarrow a_1+a_3=a_2+a_3=a_4$

$a_1+a_3=a_4 \rightarrow a_1+a_3+a_5=a_4+a_5=a_6$

$a_1+a_3+a_5=a_6 \rightarrow a_1+a_3+a_5+a_7=a_6+a_7=a_8$

$\vdots$

$a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}=a_{2n}$ …… 奇數項和

$a_2=a_3-1 \rightarrow a_2+a_4=a_3-1+a_4=a_5-1$

$a_2+a_4=a_5-1 \rightarrow a_2+a_4+a_6=a_5-1+a_6=a_7-1$

$\vdots$

$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=a_{2n+1}-1$ …… 偶數項和

$a_1+\cdots+a_{2k}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2k})=a_{2k+2}-1$

$a_1+\cdots+a_{2k+1}=(a_1+\cdots+a_{2k+1})+(a_2+\cdots+a_{2k})=a_{(2k+1)+2}-1$

綜合上面兩式，不論 n 為奇數或偶數，都有

$a_1+\cdots+a_n=a_{n+2}-1$ …… 一次和

$2(a_1^2+\cdots+a_n^2)+2(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1)=(a_1+a_2)^2+(a_2+a_3)^2+\cdots+(a_{n-1}+a_n)^2+(a_n+1)^2$

$=(a_1^2+\cdots+a_n^2)+a_{n+1}^2+a_n^2+2a_n-1$

$(a_1^2+\cdots+a_n^2)+2(a_1a_2+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_1)=a_{n+1}^2-a_n^2-a_n-1$

$a_1^2+\cdots+a_n^2=(a_0a_2+1)+(a_1a_3-1)+\cdots+(a_{n-1}a_{n+1}+(-1)^{n+1})$

$=(a_1^2+\cdots+a_n^2)+(a_1a_2+\cdots+a_na_1)-\left(a_n^2+a_n+\frac{(-1)^n-1}{2}\right)$

$a_1a_2+\cdots+a_{n-1}a_n=a_n^2+\left(\frac{(-1)^n-1}{2}\right)$ …… 關係式

$(a_1^2+\cdots+a_n^2)+2\left(a_n^2+a_n+\left(\frac{(-1)^n-1}{2}\right)\right)=a_{n+1}^2+a_n^2+2a_n-1$

$a_1^2+\cdots+a_n^2=a_{n+1}^2-a_n^2-(-1)^n=a_na_{n+1}$ …… 平方和

$a_k^3=a_{k-1}^3+3a_{k-1}a_{k-2}(a_{k-1}+a_{k-2})+a_{k-2}^3=a_{k-1}^3+a_{k-2}^3+3a_ka_{k-1}a_{k-2}$

$(a_1^3+\cdots+a_n^3)=2(a_1^3+\cdots+a_n^3)-(2a_n^3+a_{n-1}^3-1)+3(a_1a_2a_3+\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n)$

$(a_1^3+\cdots+a_n^3)+3(a_1a_2a_3+\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n)=2a_n^3+a_{n-1}^3-1$

$a_{k-1}a_ka_{k+1}+a_ka_{k+1}a_{k+2}=a_ka_{k+1}(a_{k-1}+a_{k+2})=a_ka_{k+1}(a_{k-1}+a_k+a_{k+1})=2a_ka_{k+1}^2$

$a_1a_2a_3+\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n=\frac{1}{2}\left[(a_1a_2a_3+a_2a_3a_4)+\cdots+(a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}+a_{n-2}a_{n-1}a_n)+(a_{n-2}a_{n-1}a_{n+2})\right]$

$=(a_1a_2^2+\cdots+a_{n-2}a_{n-1}^2)+\frac{a_{n-2}a_{n-1}a_n}{2} \Rightarrow a_1^2a_2+\cdots+a_{n-2}^2a_{n-1}=\frac{a_{n-2}a_{n-1}a_n}{2}$

$a_k^2a_{k+1}+a_ka_{k+1}^2=a_ka_{k+1}a_{k+2}$

$a_1^2a_2+\cdots+a_{n-2}^2a_{n-1}=(a_0a_1^2+a_1a_2^2+\cdots+a_{n-3}a_{n-2}^2)+(a_1^3+\cdots+a_{n-2}^3)$

$(a_1a_2^2+\cdots+a_{n-1}a_n^2)+(a_1^3+\cdots+a_n^3)=\frac{a_na_{n+1}a_{n+2}}{2}$ …… ①

$(a_1^2a_2+\cdots+a_{n-1}^2a_n)=\frac{a_{n-1}a_na_{n+1}}{2}$ …… ②

令 $a_1^3+\cdots+a_n^3=x$ $(a_1a_2a_3+\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n)=y$

$$\begin{cases} x+3y=2a_n^3+a_{n-1}^3-1 \\ x+y=a_n^2a_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x&=\tfrac{1}{2}(a_n^3+3a_n^2a_{n-1}-a_{n-1}^3+1) \\ y&=\tfrac{1}{2}(a_n^3-a_{n-2}a_{n-1}a_{n+1}-1) \end{aligned}$$

①+② 得到

$$(a_1^3+\cdots+a_n^3)+(a_1a_2a_3+\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n)$$

$$=\frac{1}{2}\times 2a_na_{n+1}^2-a_{n-1}a_na_{n+1}=a_n^2a_{n+1}$$

$$a_1^3+\cdots+a_n^3=\frac{1}{2}(a_n^3+3a_n^2a_{n-1}-a_{n-1}^3+1)$$

立方和

$$a_1a_2a_3+\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n=\frac{1}{2}(a_n^3-a_{n-2}a_{n-1}a_{n+1}-1)$$

④

$$a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}} \qquad a_{kn}=\frac{(\alpha^n)^k-(\beta^n)^k}{\sqrt{5}}$$

$$a_{kn}=\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\right)\left(\sum_{l=0}^{k-1}(\alpha^n)^l(\beta^n)^{k-l-1}\right)=a_n\left(\sum_{l=0}^{k-1}(\alpha^n)^l(\beta^n)^{k-l-1}\right)$$

$$\sum_{l=0}^{k-1}(\alpha^n)^l(\beta^n)^{k-l-1}=(\alpha^{kn}+\beta^{kn})+(\alpha\beta^n)(\alpha^{n(k-1)}+\beta^{n(k-1)})+(\alpha\beta^n)^2(\alpha^{n(k-2)}+\beta^{n(k-2)})+\cdots(\alpha\beta^n)^{\frac{2k+1-(-1)^k}{4}}\left(\alpha^{n\frac{(-1)^k+1}{2}}+\beta^{n\frac{(-1)^k+1}{2}}\right)$$

$\because$ $\alpha\beta$、$(\alpha^k+\beta^k)$ 為整數 $\frac{2k+1-(-1)^k}{4}$、$\frac{(-1)^k+1}{2}$ 為整數 $\therefore \sum_{l=0}^{k-1}(\alpha^n)^l(\beta^n)^{k-l-1}$ 為整數

故 $a_n | a_{kn}$ 同理 $a_k | a_{kn}$ 以及 $[a_n, a_k] | a_{kn}$

⑤ $(a_{n+1},a_n)=(a_{n+1}-a_n,a_n)=(a_n,a_{n-1})=(a_{n-1},a_{n-2})=\cdots=(a_2,a_1)=1$

$(a_{n+1},a_{n-1})=(a_{n+1}-a_{n-1},a_{n-1})=(a_n,a_{n-1})=1$

連續三項兩兩互質

$(a_n,a_{n-k})=(a_n,a_{n-k+2}-a_{n-k+1})=(a_n,-a_{n-k+3}+a_{n-k+2})$

$=\cdots=(a_n,(-1)^{t+1}a_{t-1}a_{n-k+t}+(-1)^ta_ta_{n-k+t-1})$

令 $t=k$

$(a_n,a_{n-k})=(a_n,ca_n+(-1)^ta_ka_{n-1})=(a_n,a_ka_{n-1})$

(c 為整數)

$\because (a_n,a_{n-1})=1$ $\therefore (a_n,a_{n-k})=(a_n,a_k)$