一年廿四班廿一號梅興弘　　　　　　　　　　　　　　　　民國九十二年二月五日

讀與中學生談中國數學史上的幾大成就

因為對歷史很有興趣，所以一開始見到寒假讀物的書單就認定了這本書。本書果然綜合了數學和人文，一共分四大章，有宋朝的楊輝、祖沖之、晉朝的劉徽、還有更久遠的孫子算經，尤其是看膩了名字一大串的義大利、法國數學家以後，這本書濃厚的中國味為數學添加了不少血緣情感。每一章都引用古代數學典籍的題目和理論，逐步推演，推演的過程中為讀者介紹很多相關的數學性質，當然其中大多數並不是中國原創的，但是融合古今中外正是這本書的特點，也是科學進步應有的精神。作者在引入每一項新性質時都另闢一節，看書的時候可以參照章節的名稱以免混淆。就人文方面，書中當然只是簡單帶過，其中主要還是在數學的探討，內容基本上都有一定的深度，以我的例子來說，有些地方不逐字逐句多讀一遍還真的弄不清楚，其實有時候覺得讀數學符號組成的式子還要比文字簡明得多。但是本書的排版和文法還應該要改進，如果文字敘述能更簡要易懂，排版插圖能更清晰、有規則姓，相信會讓高深的數學理論也離我們親近一些。

因為剛結束高一的課程，對書中首尾兩章探討的開方、級數和除法公式比較熟悉，對裡面的精義也較有把握，所以在這裡主要複習一下這兩章。

揚輝的三角形就是現在一般說的巴斯塔三角形，最常運用在計算兩數和乘方的時候﹝乘方公式﹞。這個三角形並不難做，我們一般通俗的做法就是把三角形兩腰寫一，中間的數是其上方兩數的和，但書中先把三角形中的數值都數學化，賦予數值更多的生命，展現於其後的計算證明中。這些中間的數值共有一個階乘關係的通式：$C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$；n 是三角形上的行數減一，r 是在一行中的位置﹝兩腰的一除外﹞。然後作者插敘一點生活上有楊輝三角形在的現象，由多個邊不貼齊的六角形木塊組成的蜂窩狀網路，從頂端單一入口進入而從底部各層各出口走出的機率正仿照楊輝三角形各層各位置上的數值。第二節複習了乘方公式﹝二項式定理﹞，從國中死背的公式起步，利用上學期剛學的數學歸納法證明了：

$$\forall k \in N, (a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1}b + \cdots + C_k^r a^{k-r}b^r + \cdots + C_k^{k-1}ab^{k-1} + b^k$$

不禁讓人讚嘆數學歸納法的威力，可以證出很多看起來根本不可能證的東西，而且觀念又很簡單，就是找出第一個整數代進去成立，再證明那整數加一後也成立。為了強調這神奇式子的實用性，作者舉出其在於開方的用途，尤其是開平方時特別方便，以前只聽過開方的算法，卻從來沒想過裡面的原理，現在才知道運用二項式定理，開任何次方都能簡化。上學期學了很久的數列和級數，這一章又介紹了高階的等差級數，並且利用代入法從第一階的公式一步步導出任何高階的公式，又把高階等差級數拉回原題楊輝三角形，原來把三角形轉一下看，又是不同的風味。同樣利用等差級數公式的代入法，又發現一般等差級數和平方數等差級數$\left(1^2+2^2+3^2+\cdots k^2\right)$和立方數等差級數$\left(1^3+2^3+3^3+\cdots k^3\right)$的關係，因為$k^2 = 2\times\dfrac{1}{2}k(k-1)+k$而且$k^3 = 6\times\dfrac{1}{6}k(k-1)(k-2)+6\times\dfrac{1}{2}k(k-1)+k$，所以都可以當做不同階的等差級數的組合，這和上學期教的加總移項的方法不太一樣，應該說更簡單了。第五節定義了一個新玩意「差分」，

不同級的差分與數列元素的關係也和楊輝三角形有關。接著介紹 $P_k(x)=\frac{1}{k!}x(x-1)\cdots(x-k+1)$ 的差分多項式，留給讀者一個問題，是否任何的高階等差級數的一般項都能表示成一個多項式？從前一節的方法我們可以得知任何公差為一的高階等差級數的一般項都能表示成一個差分多項式，又任何公差的等差級數都能以多個公差一的等差級數和表示，所以該問題的答案是肯定的。然後又回到古中國的數學應用，以等差級數的計算堆器物，不同的排列方式有不同的計算方法，很多是古籍有載的經典方法。再把方才的高階等差級數加上等比的元素，又是更複雜的問題，稱為混合級數，不過仍然可以用先前的理論把問題簡化，再根據等比級數乘上公比相減消去 $S-rS=(1-r)S$ 的方法解題。進一步把問題複雜化就要引進無窮的觀念了，從初級的無窮級數到無窮混合級數，都是在原本的級數計算上再加入趨近的概念。除了這些之外還有一種數列的特性就是遞迴的關係，在書中對它也有簡單的介紹，講到遞迴數列當然一定要說費不納西先生的兔子，還導了一遍 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$ 的公式，尤其我們班為這個題目做了一個報告以後，對它們特別有感情。記得之前在學校上 $\sum$ 的時候就一直在想有沒有什麼速算法來處理 $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}$ 的問題﹝好像還問過老師﹞，根據這本書這樣的問題只能硬著頭皮算，它舉出幾種特殊的倒數級數，只有類似的特例才有技巧性的算法。不過本章的最後一節卻能運用不等式關係，求出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的漸進值，並且指出類似的逼近方法有很高的實用價值，常常需要估計無窮級數的值。

書的最後一章主要都在探討基本的數論，最主要的是與孫子點兵直接關係的除法公式，除法公式出現了，當然輾轉相除法也不能忽略。還有以前好像在參考書裡見過的插入法，竟然是孫子算經上的東西，實在對中國古文化嘆為觀止。就像上學期的課本，既然講了除法公式，就乾脆連多項式的除法一起講了。不過有一點是滿新鮮的，就是書上說事實上只要實部和虛部都是整數的複數就可使用輾轉相除法。同餘式的定義和一些性質都包含在書的最後一章。最後的重點是一次不定方程，上學期配合「點兵」的問題也概略地碰過，只是很難想像一千多年前就有人解出這樣的題目了！

中間的兩章其實有些不太懂，但是大概有些印象，可能在學完深一點的數學以後可以再回頭看一遍。但是對劉輝的割圓術覺得似曾相識，好像有一個求極值得題目跟它的方法就很像。把一個圓內的正六角形，把邊角數不斷增多，直到最後當邊數趨近無限多時，就得到一個圓了。試圖用這樣的關係也可以找出圓週率，也就是第二章所探討的主題。第三章就圍繞著弧和切線的問題，內容有些像微積分的樣子，用這樣的理論可以求出不規則弧邊的平面甚至立體的面積或體積。但是裡面用到很多看起來非常不順眼的三角函數，所以被弄得有點糊塗。

看完書以後還是忍不住再次讚嘆中國文化的包容萬千，我覺得這樣在固有科學上尋求精進、推廣的精神非常好。也覺得我們青年們自然有古人般的智慧，只要我們肯像古人般付出，一定可以再創中國科學的高潮！我想這也是這本書的另一層涵義。