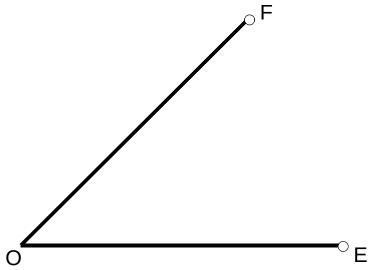
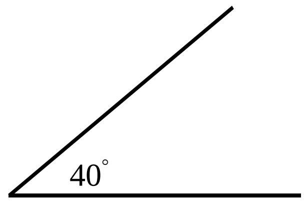
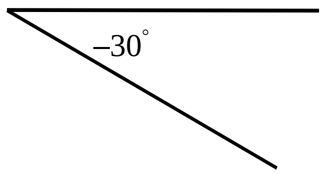
§2−2 廣義角三角函數

(甲)廣義角

設∠EOF 爲一角，如果$\overline{OE}$代表正東方向，$\overline{OF}$代表東北方向，如果站在 O 點，面向東然後轉到東北方位與先面對東北方然後再轉到東方，顯然這兩個動作是有差別的，雖然它們的方位差是一樣的，但是轉動的方向則不相同，爲了能把這種差異表現出來，我們擴大了角度的意義，從而定義了**有向角**。







(1)定義：
一角以OE以始邊，旋轉到終邊OF，從OE旋轉到OF的旋轉量稱爲**有向角**，定義中規定**逆時針旋轉為正向角，順時針旋轉為負向角**。
因爲旋轉時可以轉半圈、一圈、二圈、二圈半..等等，亦即他們的旋轉量分別是 180°、360°、720°、900°…等，因此我們打破角度 180°的限制，而將角度的範圍擴充到 180°以上，像這樣的角度就稱爲**廣義角(或稱爲有向角)**。

(2)同界角：
兩個廣義角θ ,φ 有共同的始邊與終邊，我們將這樣的θ ,φ 稱爲**同界角**。而兩個同界角之間，因爲始邊與終邊相同，因此差別只是所繞的圈數不同，故可得$\boldsymbol{\theta-\varphi=k\cdot 360^{\circ}}$，$k$爲整數。

例如：上圖中的 400°角與 40°角，690°角與-30°各都是一對同界角。

例如：57°的同界角都可寫成 $57^{\circ}+360^{\circ}\times k$ (k爲整數)
方法：**判斷θ與φ爲同界角 $\Leftrightarrow \theta-\varphi=k\cdot 360^{\circ}$，$k$爲整數**

[例題1] 求 1178°之最小正同界角與最大負同界角。 Ans：98°，−262°

(練習1) 試求下列諸角的最小正同界角與最大負同界角：
(1)675° (2)-1520° (3)-1473° (4)-21508°
Ans：(1)315°，-45°(2)280°，-80°(3)327°，-33°(4)92°，-268°

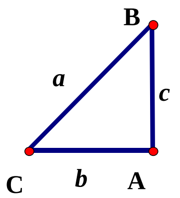
(練習2) 480°的角，令其始邊與正 X 軸重合，則其終邊落在(A)第一象限 (B)第二象限(C)第三象限(D)第四象限(E)Y 軸上　　　Ans：(B)

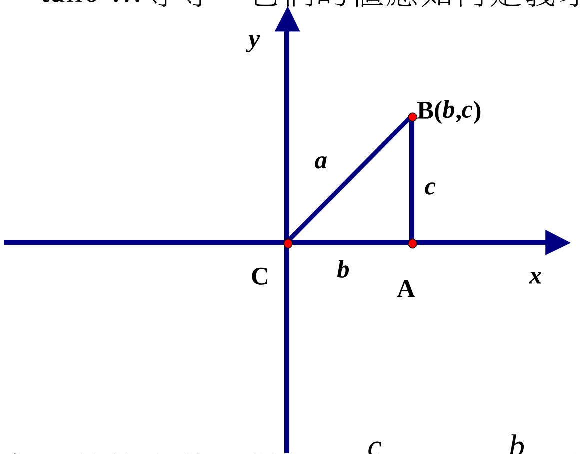
(乙)廣義角三角函數

我們想要定義廣義角的三角函數，首先我們要先清楚三角函數(正弦、正切、..)它們是一個角度的函數，此處想要利用廣義角來定義 6 個三角函數，換句話說，我們想要知道$\sin(-120^{\circ})$、$\cos370^{\circ}$、$\tan0^{\circ}$…等等，它們的值應如何定義才好？

(1)三角函數的定義：

(a)回顧銳角三角函數的定義：





直角三角形ABC中，根據銳角三角函數的定義可得$\sin C=\frac{c}{a}$，$\cos C=\frac{b}{a}$，現在將C點移至座標原點，如上右圖所示，可得B(b,c)，所以正弦與餘弦的定義，可用另一觀點來看：$\sin C=\frac{c}{a}=\frac{\text{B點的}y\text{坐標}}{\text{B到原點的距離}}$，$\cos C=\frac{b}{a}=\frac{\text{B點的}x\text{坐標}}{\text{B到原點的距離}}$

而這個觀點使得我們可以將定義由線段長度，延伸至坐標，因為坐標可正可負，因此定義廣義角時就可以拿來引用。

(b)廣義角的三角函數；

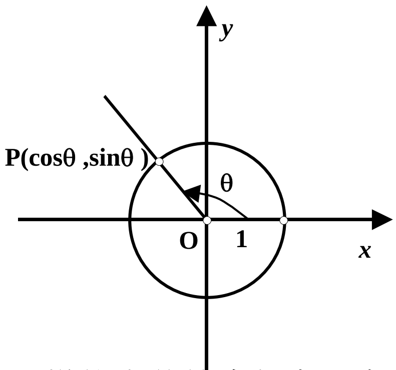
在坐標平面上做一個以原點為圓心，半徑等於r的圓，給定一個廣義角θ，規定**θ 的始邊為x軸的正向**，角的頂點為原點，根據θ 的旋轉量，可畫出終邊的位置。設終邊這條射線與單位圓交於P(x,y)，

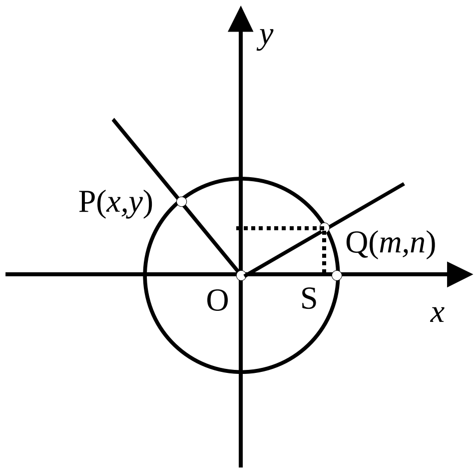
定義：$\sin\theta=\frac{y}{r}$，$\cos\theta=\frac{x}{r}$。$r=\overline{OP}$

特別情形：

當r=1 時$\sin\theta=\frac{y}{1}=y$，$\cos\theta=\frac{x}{1}=x$

所以單位圓上的點P的坐標可以寫成P(cosθ ,sinθ)





(c)這樣的定義符合銳角三角函數的定義嗎？

如果角度爲銳角，即終邊爲$\overrightarrow{OQ}$，此時Q(m,n)在圓上，設Q對x軸的垂足點爲S，則ΔQOS爲直角三角形，設**∠SOQ=α**，根據銳角三角函數的定義，

$\cos\alpha=\frac{m}{r}$，$\sin\alpha=\frac{n}{r}$，此與(a)中的定義是一樣的。

(d)其他三角函數的定義：

根據三角函數間的關係，我們可定義其他的三角函數：如果$\cos\theta=\frac{x}{r}$,$\sin\theta=\frac{y}{r}$

結論：設角θ終邊上的點P(x,y)，$r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$

(1)

sinθ=______　　　　cosθ=______

tanθ=______($x\neq0$)　cotθ=______($y\neq0$)

secθ=______($x\neq0$)　tanθ=______($y\neq0$)

(2)由終邊的位置判別三角函數的正負：

(a)sinθ之正負⇒看y在第一、二象限爲正，y在第三、四象限爲負

所以$\sin\theta=\frac{y}{r}$**在第一、第二象限爲正，在第三、第四象限爲負**

(b)cosθ之正負⇒看x在第一、四象限爲正，x在第二、三象限爲負

所以$\cos\theta=\frac{x}{r}$**在第一、第四象限爲正，在第二、第三象限爲負**

(c)整理成表格如下：

象限 / 函數	一	二	三	四
sinθ與 cscθ	+	+	–	–
cosθ與 secθ	+	–	–	+
tanθ與 cotθ	+	–	+	–

(d) 完成下列各表：

角度θ	**0°**	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**	**120°**	**135°**	**150°**	**225°**	**270°**	**300°**
sinθ											
cosθ											
tanθ											

(e) 廣義角三角函數值的範圍：

$|\sin\theta|\le1$，$|\cos\theta|\le1$

$\tan\theta\in R$，$\cot\theta\in R$

$|\sec\theta|\ge1$，$|\csc\theta|\ge1$

[例題2] 在 xy 平面上，以 x 軸之正向爲始邊作一廣義角θ，其終邊上有一點 P 之坐標如下表所示，試填寫θ的各三角函數值。

P 點坐標	(5,12)	(3,–4)	(–1,–2)	(3,–1)	(5,0)	(0,3)	(–4,0)	(0,–3)
OP 長度								
sinθ								
cosθ								
tanθ								
cotθ								
secθ								
cscθ								

[例題3] 設θ之終邊上有一點$(x,-5\sqrt{2})$，已知 $\tan\theta=\sqrt{2}$，求 sinθ，cosθ。

Ans：$\sin\theta=\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$

(練習3) 座標平面上，O 為原點，θ為第二象限角，P$(x,2)$是θ角終邊上一點，已知$\overline{OP}=3$，求 x 及 cosθ之值。Ans：$x=-\sqrt{5}$，$\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{5}}{3}$

(練習4) 設點 P$(-5\sqrt{3}\ ,\ y)$在角θ 的終點上，若 $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ，則 y=_____，cscθ =_______。Ans：$y=-5$，$\csc\theta=-2$

(練習5) θ不是象限角且 tanθ＞0，secθ＜0，則點 $p(\cos\theta，\sin\theta)$在
(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限 (E)兩坐標軸上。Ans：(C)

(練習6) 若θ在第二象限，則 $\dfrac{\theta}{2}$可能在第幾象限？Ans：第 1 或 3 象限

(練習7) 設 $\sin\theta=\dfrac{-4}{5}$，求其他三角函數。(hint：需討論象限)

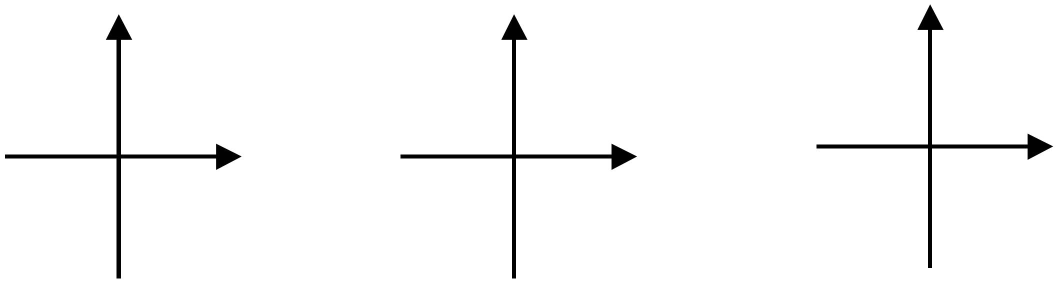
Ans：

(1)θ為第三象限角，$\sin\theta=\dfrac{-4}{5}$, $\cos\theta=\dfrac{-3}{5}$, $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$, $\cot\theta=\dfrac{3}{4}$, $\sec\theta=\dfrac{5}{-3}$, $\csc\theta=\dfrac{5}{-4}$

(2)θ為第四象限角，$\sin\theta=\dfrac{-4}{5}$, $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$, $\tan\theta=\dfrac{-4}{3}$, $\cot\theta=\dfrac{3}{-4}$, $\sec\theta=\dfrac{5}{3}$, $\csc\theta=\dfrac{5}{-4}$

(2)三角函數的化簡：

(a)角度θ終邊的位置與三角函數的正負：



(b)角度化簡的原則：

①凡是同界角均有相同的三角函數值：

若θ_1與θ_2若為同界角，則由於同界角具有相同的始邊與終邊，所以我們知道同界角具有相同的三角函數值。

$$\boxed{\sin，\cos，\tan，\cot，\sec，\csc}\,(n\times 360^\circ+\theta)$$

$$=\boxed{\sin，\cos，\tan，\cot，\sec，\csc}\,(\theta)$$

利用此觀念可將任意角度的三角函數化成 0°到 360°之間的三角函數

例如：$\sin 789^\circ=\sin(2\cdot 360^\circ+69^\circ)=\sin 69^\circ$，$\tan(-1000^\circ)=\tan(-3\cdot 360^\circ+80^\circ)=\tan 80^\circ$

②負角之三角函數值的變換：

$$\boxed{\sin，\tan，\cot，\csc}\,(-\theta)=-\boxed{\sin，\tan，\cot，\csc}\,(\theta)$$

$$\boxed{\cos，\sec}\,(-\theta)=\boxed{\cos，\sec}\,(\theta)$$

[說明]：

如右圖，P點與Q點分別是廣義角$\theta,-\theta$終邊與單位圓的交點

根據定義可知

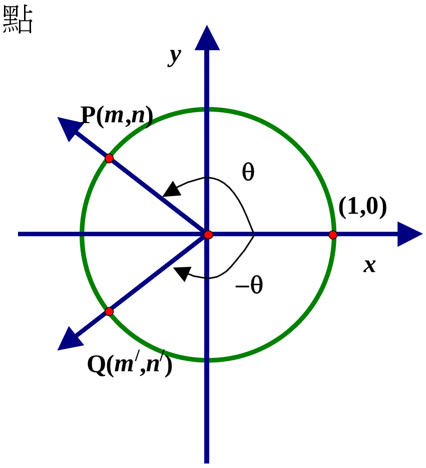
$m=\cos\theta, n=\sin\theta$ ；$m'=\cos(-\theta), n'=\sin(-\theta)$

又因為P、Q分別對稱於x軸，

$\Rightarrow m=m'$，$n=-n'$

$\Rightarrow \cos\theta=\cos(-\theta)$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$。

其餘四個三角函數，可由$\sin\theta,\cos\theta$ 的關係推得。



③角 $180^\circ\pm\theta$ ，$360^\circ\pm\theta$ 之三角函數值的變換：

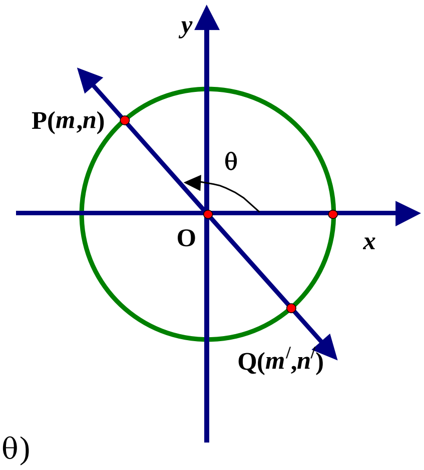
$$\boxed{\sin，\cos，\tan，\cot，\sec，\csc}\,(180^\circ\pm\theta，360^\circ\pm\theta)$$

$$=\pm\boxed{\sin，\cos，\tan，\cot，\sec，\csc}\,(\theta)$$

♦ ±號的選定可將θ 視為銳角去判斷正負

[說明]：

如右圖，P點與Q點分別是廣義角θ,180°+θ終邊與單位圓的交點
根據定義可知
$m=\cos\theta, n=\sin\theta$ ；$m'=\cos(180°+\theta), n'=\sin(180°+\theta)$
又因爲P與Q對稱於O點
$\Rightarrow m'=-m, n'=-n$。
$\Rightarrow \cos(180°+\theta)=-\cos\theta$，$\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$。
另外一方面，
$\cos(180°-\theta)=\cos(180°+(-\theta))=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$。
$\sin(180°-\theta)=\sin(180°+(-\theta))=-\sin(-\theta)=\sin\theta$。



④角 $90°\pm\theta$ ，$270°\pm\theta$ 之三角函數值的變換：

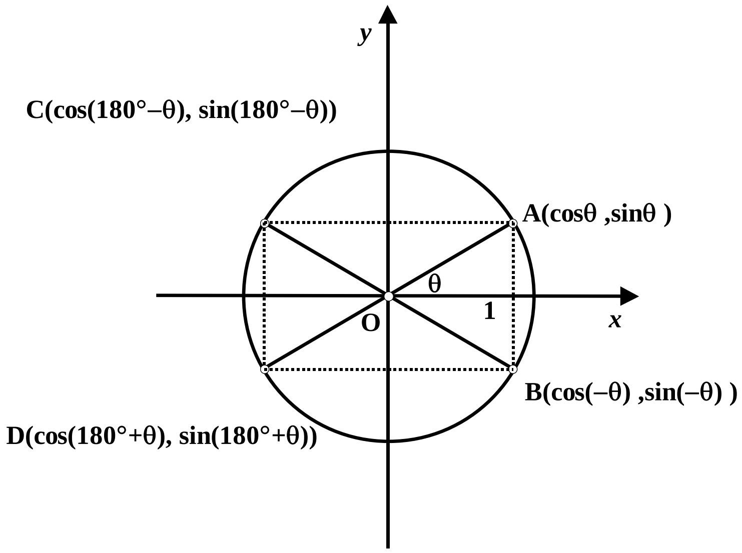
$\boxed{\sin，\cos，\tan，\cot，\sec，\csc}\,(90°\pm\theta，270°\pm\theta)$

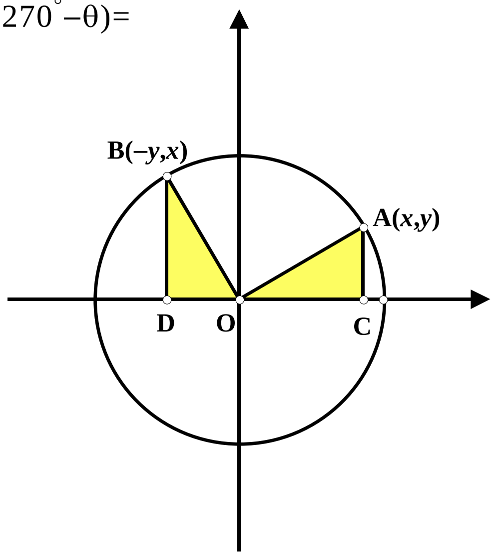
$=\pm\boxed{\cos，\sin，\cot，\tan，\csc，\sec}\,(\theta)$

♦ ±號的選定可將θ 視爲銳角去判斷正負，請注意上式中正餘函數互換。
例如：

$\sin(90°+\theta)=$ $\qquad$ $\cos(90°+\theta)=$ $\qquad$ $\tan(90°+\theta)=$

$\sin(270°-\theta)=$ $\qquad$ $\cos(270°-\theta)=$ $\qquad$ $\tan(270°-\theta)=$





[例題4] 請化簡下列三角函數：

(a)$\sin1800°$ (b)$\cos1560°$ (c)$\sin(-1050°)$ (d)$\tan945°$

[例題5] 化簡下列各小題的值：

(1)$\sin60^{\circ}\cdot\cos150^{\circ}-\cos225^{\circ}\sin(-315^{\circ})+\tan300^{\circ}\cdot\sec(-180^{\circ})=$________。

(2)$4\cos(-960^{\circ})+\tan(585^{\circ})+2\sin(-1020^{\circ})=$______。

Ans：(1)$\dfrac{-1+4\sqrt{3}}{4}$ (2)$-1+\sqrt{3}$

[例題6] 化簡$\dfrac{\sin(180^{\circ}+\theta)\tan^{2}(180^{\circ}-\theta)}{\cos(270^{\circ}+\theta)}-\dfrac{\sin(270^{\circ}-\theta)\csc^{2}(90^{\circ}+\theta)}{\sin(90^{\circ}+\theta)}$。Ans：1

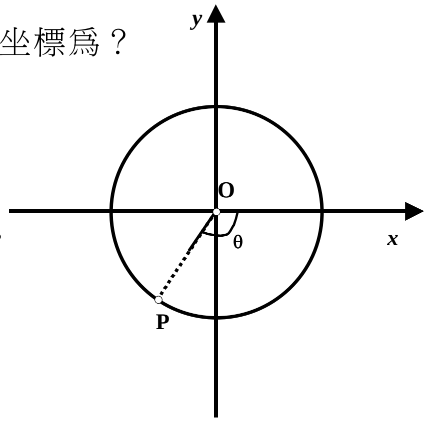
[例題7] 設$\cos100^{\circ}=k$，試以k表

(1)$\sin(-260^{\circ})=$_______。(2)$\tan(-260^{\circ})=$______。

(3)$\cos(-80^{\circ})=$________。(4)$\sin(-80^{\circ})=$________。

Ans：(1)$\sqrt{1-k^2}$ (2)$\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ (3)$-k$ (4)$-\sqrt{1-k^2}$

(練習8) 右圖為一圓心在原點的單位圓，則圓弧上一點 P 的坐標為？
(A) $(\cos\theta,\sin\theta)$　(B)$(\cos\theta,-\sin\theta)$　(C) $(-\cos\theta,\sin\theta)$
(D) $(-\cos\theta,-\sin\theta)$　(E)$(-\sin\theta,\cos\theta)$　Ans：(B)



(練習9) 設 $\tan\theta=\dfrac{-4}{3}$ ，$\cos\theta\cdot\cot\theta<0$，試求 $\dfrac{4\cos\theta+1}{3\sin\theta+5}$ 之值。
Ans：$\dfrac{17}{13}$

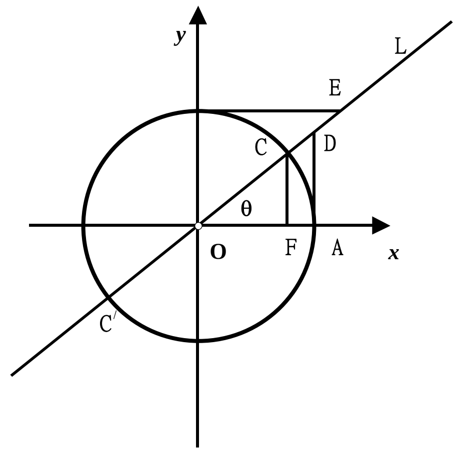
(練習10) 設 $0<\alpha<45^\circ$，試求下列二式的值：
(1)$\sin^2(45^\circ+\alpha)+\sin^2(45^\circ-\alpha)$ (2)$\tan(45^\circ+\alpha)\cdot\tan(45^\circ-\alpha)$ Ans：(1)1 (2)1

(練習11) 試求下列各值：
(1)$\cos570^\circ\cdot\sin150^\circ+\sin(-330^\circ)\cdot\cos(-390^\circ)=$_____。
(2)$\sin210^\circ+\tan(-135^\circ)+\cos(-390^\circ)=$_____。
(3)$\sin60^\circ\cdot\cos150^\circ-\cos225^\circ\sin315^\circ+\tan300^\circ\cdot\sec180^\circ=$_______。
(4)$\sin1560^\circ\tan(-510^\circ)+\cos(-240^\circ)\cot495^\circ=$______。
Ans：(1)0 (2)$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　(3)$\dfrac{4\sqrt{3}-5}{4}$　(4)1

(練習12) 化簡 $\dfrac{\cos(180^\circ+\theta)\cot^2(180^\circ-\theta)}{\sin(270^\circ+\theta)}-\dfrac{\cos(270^\circ-\theta)\csc^2\theta}{\cos(90^\circ+\theta)}$。Ans：$-1$

(練習13) 設$\tan20^\circ=k$，試求$\sec250^\circ=$______。　Ans：$\dfrac{-\sqrt{k^2+1}}{k}$

[例題8] 在坐標平面上以原點O為圓心，1 為半徑畫一圓，交x軸正向於A點，y軸正向於B點，再畫一直線L過原點並交圓O於C,C$'$兩點。過A點與B點作圓的切線，分別交直線L於D點與E點並自C點作x軸的垂線交x軸於F點，設$\angle COA=\theta$。
(1)在上圖中分別找出長度等於$\sin\theta$,$\cos\theta$,$\tan\theta$,$\cot\theta$,$\sec\theta$,$\csc\theta$ 的單一線段。
(2)試比較$\sin\theta$,$\tan\theta$,$\sec\theta$ 的大小。
(3)試比較$\cos\theta$,$\cot\theta$,$\csc\theta$ 的大小。



[例題9] (1)試求函數$f(x)=\cos^2 x+3\sin x+1$ 的最大值與最小值。

(2)試求函數$f(x)=\dfrac{2\sin x+1}{\sin x+2}$ 的範圍。

Ans：(1) 4，-2 (2)$-1\le f(x)\le 1$

(練習14) 請計算$\sum_{k=1}^{180}\cos k^\circ=\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\ldots+\cos 179^\circ+\cos 180^\circ=$？ Ans：$-1$

(練習15) 請求出$\sin 1^\circ+\sin 2^\circ+\ldots+\sin 360^\circ=$？ Ans：0

(練習16) 求下列各函數的範圍：

(1)$f(x)=\dfrac{2\sec x+1}{3\sec x-1}$ (2)$f(x)=\sin^2 x-\cos x$

Ans：(1)$\dfrac{1}{4}\le f(x)\le\dfrac{3}{2}$ (2)$-1\le f(x)\le\dfrac{5}{4}$

(丙)三角函數值表

(1) 三角函數值表的簡介：

(a)附錄中列出了 0°到 90°，每隔 $10'$ (「$'$」讀做分，「$''$」讀做秒，$1^\circ=60'$，$1'=60''$)的六種三角函數，其中數值是以十進位有限小數表示(小數點前後共取四位)，大都只是近似值。

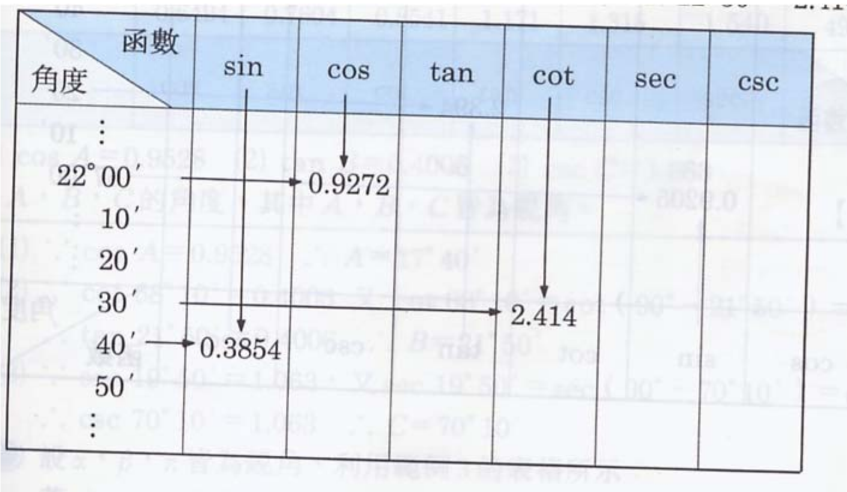
(b)表中最左一行由上而下列有 0°到 45°的各角度，最上一列由左而右印有 sin、cos、tan、cotθ、sec、csc各函數的符號，而表中最右一行由下而上列
有 45°到 90°的各角度，最下一列由左而右印有cos、sin、cot、tan、csc、sec各函數的符號，這是應用餘角關係所編排的，如$\sin 43^\circ 20'=\cos 46^\circ 40'$。

(2) 如何查表：

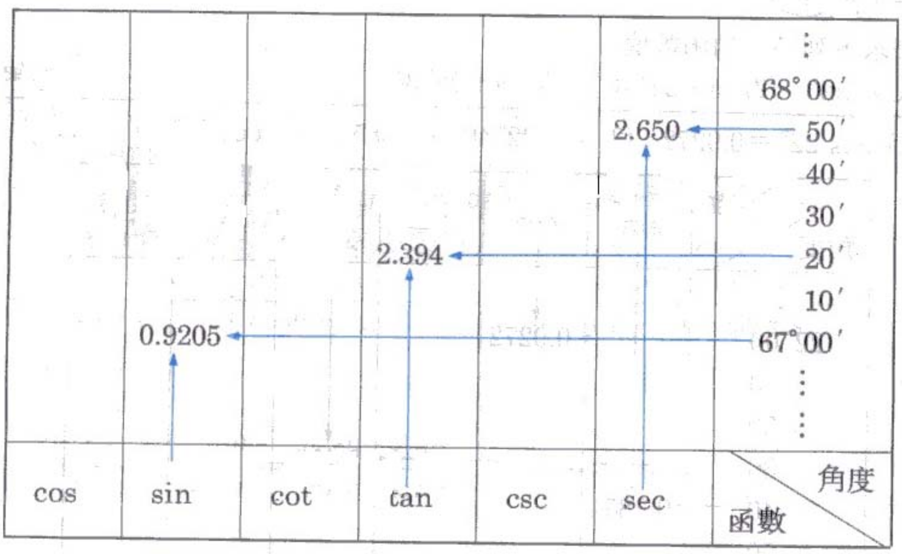
(a)查 1°到 45°的各角三角函數值，是從表的**最左一行**，**自上而下**查角度，再從**最上一列**，查三角函數的符號，則角度所在的一列，與函數符號所在的一行，相交位置上的數，就是這個角度的某一個三角函數值。

(b)查 45°到 90°的各角三角函數值，是從表的**最右一行**，**自下而上**查角度，再從**最下一列**，查三角函數的符號，則角度所在的一列，與函數符號所在的一行，相交位置上的數，就是這個角度的某一個三角函數值。

[例題10] 查表求下列各三角函數值：
$(1)\cos 22^\circ$　$(2)\sin 22^\circ 40'$　$(3)\cot 22^\circ 30'$



[例題11] 查表求下列各三角函數值：
(1)$\sin 67^{\circ}$　(2)$\tan 67^{\circ}20'$　(3)$\sec 67^{\circ}50'$



[例題12] 利用下表求各三角函數的角度
(1)$\cos A=0.9528$　(2)$\tan B=0.4006$　(3)$\csc C=1.063$

函數 / 角度	sin	cos	tan	cot	sec	csc	
17° 40′	0.3035	$\boxed{0.9528}$	0.3185	3.140	1.049	$\boxed{3.295}$	
19° 50′	$\boxed{0.3393}$	0.9407	0.3607	$\boxed{2.773}$	$\boxed{1.063}$	2.947	
	0.3719	0.9283	$\boxed{0.4006}$	2.496	1.077	2.689	68° 10′
	0.6494	0.7604	0.8541	1.171	1.315	1.540	49° 30′
	cos	sin	cot	tan	csc	sec	角度 / 函數

Ans：(1)$\angle A=17^{\circ}40'$　(2)$\angle B=21^{\circ}50'$　(3)$\angle C=70^{\circ}10'$

[例題13] 利用三角函數值表與三角函數的變換公式求下列各值：
(1)$\sin 26^{\circ}$ (2)$\sin 926^{\circ}$ (3)$\tan 70^{\circ}$ (4)$\tan(-290^{\circ})$ (5)$\cos 63^{\circ}20'$　(6)$\cos 603^{\circ}20'$
Ans：(1)0.4384 (2)−0.4384 (3)2.7475 (4)2.7475 (5)0.4488 (6)−0.4488

(3)三角函數的大小：

(a)

角度θ	sinθ	cosθ	tanθ	cotθ	secθ	cscθ
由 1°到 89°	增大	減小	增大	減小	增大	減小

(b)

角度 / 函數	$0<\theta<45^\circ$	$\theta=45^\circ$	$45^\circ<\theta<90^\circ$
正餘弦	$\sin\theta <\cos\theta$	$\sin\theta =\cos\theta$	$\sin\theta >\cos\theta$
正餘切	$\tan\theta <\cot\theta$	$\tan\theta =\cot\theta$	$\tan\theta >\cot\theta$
正餘割	$\sec\theta <\csc\theta$	$\sec\theta =\csc\theta$	$\sec\theta >\csc\theta$

[例題14] 設$\cos40^\circ=0.7660$，$\cos41^\circ=0.7547$

(1)求$\cos40^\circ10'$的值。 (2)若$\cos\theta=0.76$，求銳角θ的值。

Ans：(1)0.7641 (2)40.53°

(練習17) 試比較下列各大小次序：

(1)$\sin20^\circ$，$\tan20^\circ$，$\sec20^\circ$ (2)$\sin130^\circ$，$\tan130^\circ$，$\sec130^\circ$

(3) $\sin220^\circ$，$\tan220^\circ$，$\sec220^\circ$ (4)$\sin310^\circ$，$\tan310^\circ$，$\sec310^\circ$

Ans：(1) $\sin20^\circ< \tan20^\circ < \sec20^\circ$ (2) $\sec130^\circ< \tan130^\circ<\sin130^\circ$

(3) $\sec220^\circ< \sin220^\circ< \tan220^\circ$ (4) $\tan310^\circ< \sin310^\circ< \sec310^\circ$

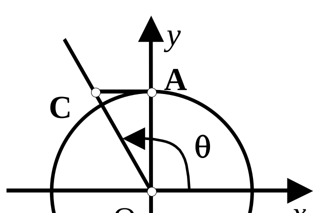
(練習18) 設$a=\cos(-750^\circ)$，$b=\tan(-1140^\circ)$，$c=\sec4995^\circ$，是比較a,b,c之大小。

Ans：$c>a>b$

(練習19) 已知$\sin47^\circ20'=0.7353$，$\sin47^\circ30'=0.7373$，則$\sin(-227^\circ27')$最接近下列那一個數？(A)0.7359(B)−0.7359(C)−0.7367(D)0.7367

(練習20) 若$\sin53^\circ20'=0.8021$，$\sin53^\circ30'=0.8039$，$\sin\theta =-0.8030$， 且 $180^\circ<\theta <270^\circ$，則θ =_____。Ans：$233^\circ25'$

綜合練習



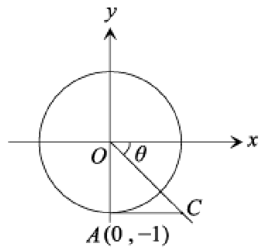
(1) 設 $\cot\theta = \frac{-4}{3}$，且 $\sin\theta > 0$，試求 $\frac{3\sin\theta + 5\cos\theta}{2\sin\theta + 6\cos\theta}$ =_____。

(2) 如右圖，單位圓 O 與 y 軸交於 A,B 兩點。角θ 的頂點為原點，始邊在 x 軸的正向上，終邊為 $\overrightarrow{OC}$，直線 AC 垂直於 y 軸且與角θ 的終邊交於 C 點，則下列那一個函數值為AC ？

(A)$|\sin\theta|$(B)$|\cos\theta|$(C)$|\tan\theta|$(D)$|\cot\theta|$(E)$|\sec\theta|$

(3) 如下圖，A 為單位圓與 y 軸負向的交點，$\overline{AC} \perp y$ 軸與角θ終點交點為 C，則 $\overline{AC}$ =？

(A) $|\tan\theta|$ (B) $|\cot\theta|$ (C) $|\sec\theta|$ (D) $|\csc\theta|$ (E) $|\sin\theta|$。



(4) 若點($\sin\theta\cos\theta$，$\tan\theta\sec\theta$)在第三象限，則θ在第________象限。

(5) 點 P(a,b)為角θ終邊與直線 $y+12=0$ 的交點，且 $\sec\theta=\frac{-13}{5}$，求(a,b)=________。

(6) 求下列各函數的值。(a)$\sin870°$(b)$\sin(-1215°)$(c)$\cos(-105°)$(d)$\tan2010°$

(7) 設$\tan\theta=3$，試求下列各式：

(a)$\frac{3\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-2\cos\theta}$ (b)$\sin^2\theta-3\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta$ (c)$\frac{10\sin\theta+3}{\cos\theta+1}$

(8) 設 $4\cos^2\theta-8\cos\theta-5=0$，求$\sin\theta$之值。

(9) $\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\sin(360^\circ-\theta)} + \frac{\cos(-\theta)}{\sin(270^\circ+\theta)} + \frac{\tan(90^\circ+\theta)}{\cot(180^\circ+\theta)}$ 之值=________________。

(10) 若 $90^\circ<\theta<180^\circ$，且$\cos\theta+\sin\theta=\frac{1}{5}$，請求下列兩小題的值：

(a)$\cos\theta$=？ (b)$\frac{\sec\theta}{\tan\theta} + \frac{\csc\theta}{\cot\theta}$ =？ (c)$\sin\theta\cos\theta$ =？

(11) 求$\sin^2 1°+\sin^2 2°+\sin^2 3°+\ldots\sin^2 90°$=？

(12) 設 $45<\theta<90^\circ$，令$a=\log_{1/2}\sin\theta$，$b=\log_{1/2}\cos\theta$，$c=\log_{1/2}\tan\theta$，$d=\log_{1/2}\sec\theta$

試比較a,b,c,d之大小。

(13) 設$a=\sec337^\circ$, $b=\tan225^\circ$, $c=\cos143^\circ$, $d=\sin37^\circ$，試比較a,b,c,d之大小。

(14) 設 $a=\sin1230^\circ$，$b=\cos\theta(-430^\circ)$，$c=\tan65^\circ$，$d=\sin(-430^\circ)$，則(A)$a>b>c>d$ (B) $d>c>b>a$(C) $a>c>b>d$(D) $c>a>b>d$ (E) $c>d>a>b$。

(15) 利用三角函數與內插法表求$\sin(-1028^\circ 23')$之值。(四捨五入求至小數點第四位)

(16) 若 $0^\circ<\theta<45^\circ$，求$\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}$ 之值。

(17) 設$A+B+C=180^\circ$，求證：

(a)$\tan\frac{A+B}{2}=\cot\frac{C}{2}$ (b)$\sin A=-\cos(\frac{3A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2})$ (c)$\sin(\frac{A}{2}+B)=\cos(\frac{B}{2}-\frac{C}{2})$。

進階問題

(18) 求 $f(x)=\frac{2\tan x}{\tan^2x+\tan x+1}$的範圍。

(19) 將半徑為 1 的半圓周$\overset{\frown}{AB}$ 分成 180 等分，設等分點依次為P_1、P_2、P_{179}，

求 $\sum_{k=1}^{179}\overline{AP_k}^2$ 之和。

(20) 設$\sin\theta$為$x^2+x+a=0$ 的一根，求a值的範圍。

綜合練習解答

(1) $\frac{11}{18}$ (2) (D) (3) (B) (4) 第四象限 (5) $(-5,-12)$ (6) (a)$\frac{1}{2}$ (b)$\frac{-\sqrt{2}}{2}$ (c)$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (d)$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (7) (a)10 (b)$\frac{1}{5}$ (c)$\pm3\sqrt{10}$ (8) ①θ在第二象限，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，；②θ在第三象限，$\sin\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (9) -3 (10) (a)$\frac{-3}{5}$ (b)$\frac{-5}{12}$ (c)$\frac{-12}{25}$

(11) $\frac{91}{2}$ [提示：$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$ ，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$] (12) $b<a<c<d$ (13) $a>b>d>c$ (14) (D) (15) 0.7839 (16) $-2\sin\theta$[提示：$1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$]

(17) 提示：(b) $\frac{3A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=A+\frac{A+B+C}{2}=A+90^\circ$ (c) $\frac{A}{2}+B=(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})+\frac{B}{2}=(90^\circ-\frac{C}{2})+\frac{B}{2}$

(18) $-2\le f(x)\le\frac{2}{3}$ (19) 358[提示：可令$P_k(\cos k^\circ,\sin k^\circ)$，$\Rightarrow$ $\overline{AP_k}^2=2+2\cos k^\circ$]

(20) $-2\le a\le\frac{1}{4}$