第二章 三角函數的基本概念

§2–1 銳角三角函數

(甲)銳角三角函數

(1)銳角三角函數的定義：設ΔABC 爲直角三角形，其中∠C 爲直角三角形，

$\overline{AB}$爲斜邊，兩股$\overline{BC}$與$\overline{AC}$分別是∠B 的鄰邊與對邊。

設$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，則我們定義∠A的三角函數如下：

∠A的**正弦**=sinA= $\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{a}{c}$

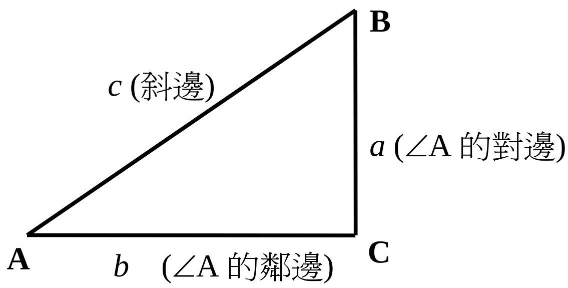
∠A的**餘弦**=cosA= $\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{b}{c}$

∠A的**正切**=tanA= $\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{a}{b}$

∠A的**餘切**=cotA= $\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{b}{a}$

∠A的**正割**=secA= $\dfrac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{c}{b}$

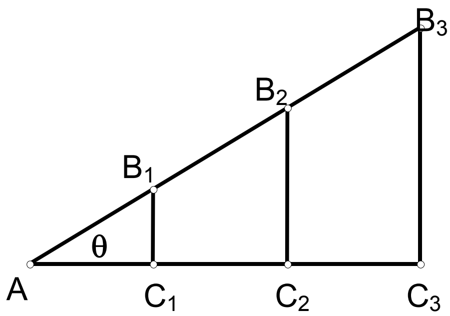
∠A的**餘割**=cscA= $\dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{c}{a}$



例如：直角三角形ABC各邊爲c=13，a=12，b=5

依據定義：sinB= $\dfrac{5}{13}$ ，cosB= $\dfrac{12}{13}$ ，tanB= $\dfrac{5}{12}$

cotB= $\dfrac{12}{5}$ ，secB= $\dfrac{13}{12}$ ，cscB= $\dfrac{13}{5}$



[討論]：給定一銳角∠A(即θ)它的六個三角函數值亦隨之確定了。

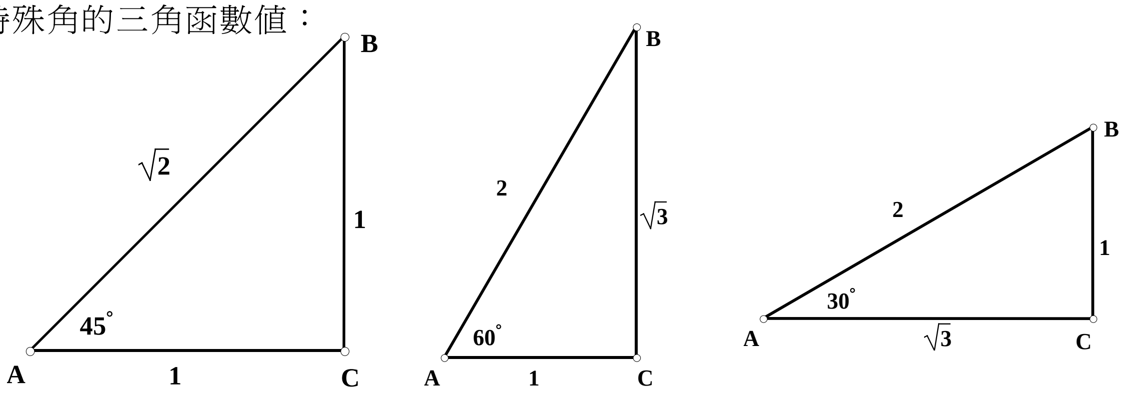
直角$\triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2 \sim \triangle AB_3C_3 \sim \ldots\ldots$，

因$\sin\theta=\dfrac{B_1C_1}{AB_1}=\dfrac{B_2C_2}{AB_2}=\dfrac{B_3C_3}{AB_3}\cdots$

故知∠A(即θ)的六個三角函數值只受∠A(即θ)的大小影響，

而不在乎三角形的大小。

(2)特殊角的三角函數值：



θ	sinθ	cosθ	tanθ	cotθ	secθ	cscθ
30°						
45°						
60°						

[例題1] 一直角三角形 ABC 中，設$\overline{AC}$=41，$\overline{AB}$=40，$\overline{BC}$=9，令∠BAC=θ，求θ的六個三角函數值。

[例題2] 試求下列各式之值：

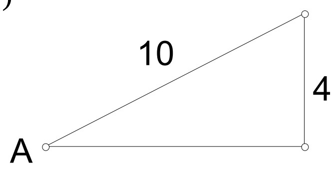
(1)$2\sin^2 30°+3\cot^2 45°+\cos^2 60°$　　(2)$\csc^3 45°+\sec^3 30°+\cot^3 60°$

Ans：(1)$\frac{15}{4}$　(2)$2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

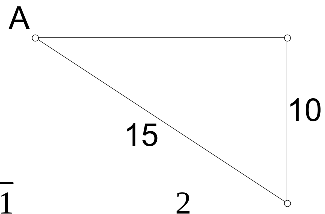
[例題3] 設一直角三角形 ABC 中，$\angle A=\theta$，已知 $\cot\theta=2$，試求其他五個三角函數值。

(練習1) 在下列各三角形，分別計算 sinA，cosA，tanA 之值。

(1)



(2)



Ans：(1)$\sin A=\dfrac{2}{5}$，$\cos A=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$，$\tan A=\dfrac{2}{\sqrt{21}}$

(2)$\sin A=\dfrac{2}{3}$，$\cos A=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan A=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

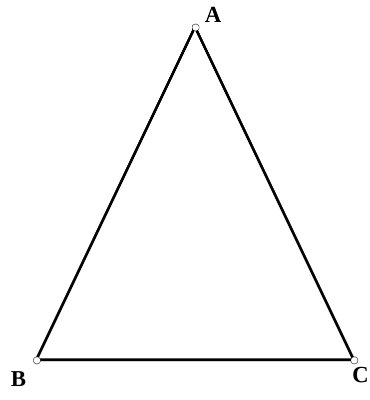
(練習2) 設θ為銳角且$\tan\theta=\sqrt{2}$，則$\sin\theta=$＿＿＿＿＿＿＿，而$\sec\theta=$＿＿＿＿＿＿＿。

Ans：$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；$\sqrt{3}$

(練習3) 設θ為一銳角，$\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=3+2\sqrt{2}$，求 $\sin\theta=$＿＿＿。Ans：$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

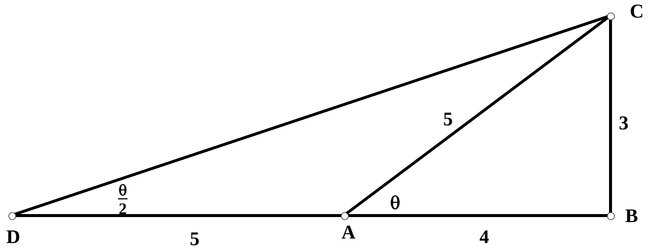
[例題4] 如圖，有一等腰三角形 ABC，其中$\overline{AB}=\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=4$

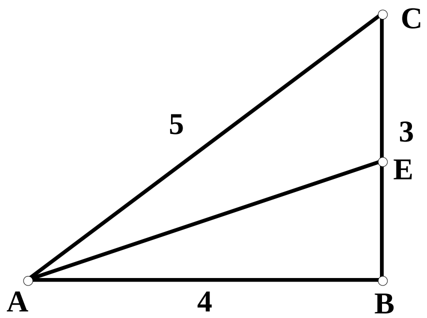
請問 tanB=？ sinB=？ Ans：$\sin B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan B=2\sqrt{2}$



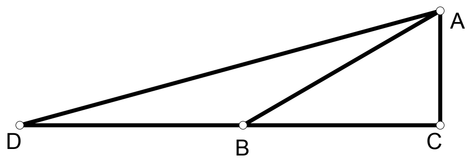
[例題5] 設θ爲銳角，且 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，試求 $\sin\frac{\theta}{2}$、$\cos\frac{\theta}{2}$。

Ans：$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$



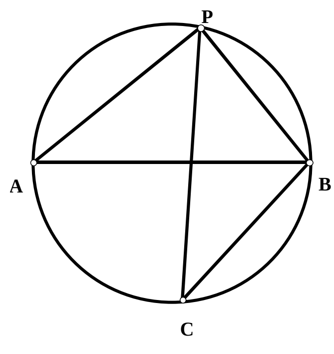


(練習4) 於ΔABC 中，∠A 爲直角，$\overline{AB}=\overline{AC}$，D 是$\overline{AC}$的中點令∠DBC=θ ，則 $\cot\theta=$_____。 Ans：3



(練習5) 設$\overline{AC}\perp\overline{BC}$，$\angle ABC=30^\circ$，$\overline{AB}=\overline{BD}$，如右圖所示，試利用右圖求$\sin 15^\circ$，$\cos 15^\circ$，$\tan 15^\circ$之值。

Ans：$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},2-\sqrt{3}$



(練習6) 如圖，$\overline{AB}$爲直徑且$\overline{AB}=10$，已知 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，求 PA=？

Ans：PA=6

(練習7) $\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$垂直$\overline{BC}$於 D，已知$\overline{AB}=25$，$\sin B=\frac{3}{5}$，$\sin C=\frac{15}{17}$，

則下列敘述何者正確？(A) $\overline{AD}=15$　(B) $\overline{DC}=8$　(C) $\overline{AC}=17$　(D) $\overline{BC}=28$　(E) $\sin A=\dfrac{15}{17}$。Ans：(A)(B)(C)(D)

(練習8) 直角△ABC 中，∠C＝90°，$\overline{AC}=4$，$\overline{BC}=3$，
自 C 作$\overline{CD}$垂直$\overline{AB}$於 D，作$\overline{DE}$垂直$\overline{AC}$於 E，
則$\overline{DE}$的長為_________。Ans：$\dfrac{48}{25}$

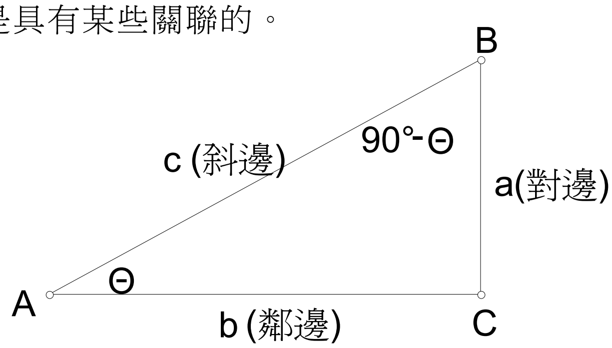
(乙)三角函數的基本關係

(1)由上一節知，若三角形△ABC中，∠C=90°，

∠A的度數為θ，以a,b與c分別表示三邊$\overline{BC}$，$\overline{CA}$與$\overline{AB}$之長，則可發現這六個三角函數並非毫不相干，而是具有某些關聯的。

(a)預備公式

銳角三角函數的定義



sinθ=　　cosθ=　　tanθ=　　cotθ=　　secθ=　　cscθ=

(b)倒數關係：

①sinθ ×cscθ=________⇒即cscθ =_______________

②cosθ ×secθ=________⇒即secθ =_______________

③tanθ ×cotθ=________⇒即tanθ =_______________

(c)商數關係：

①tanθ=_____________________________②cotθ=____________________

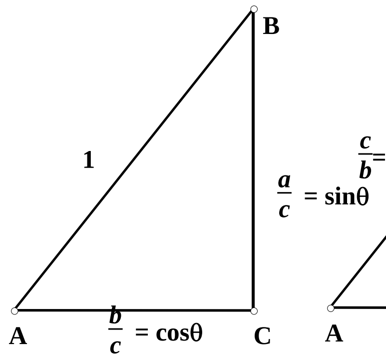
(d)平方關係(利用畢式定理可得)

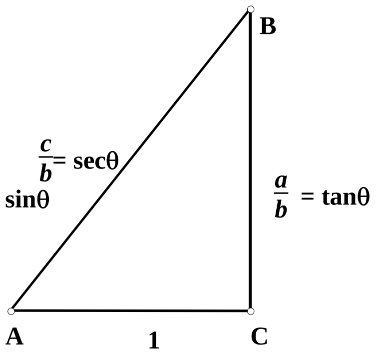
① $\sin^2\theta+\cos^2=1$　　② $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$　③$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

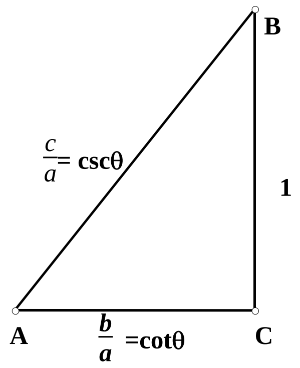
$\sin^2A+\cos^2A=(\dfrac{a}{c})^2+(\dfrac{b}{c})^2=\dfrac{c^2}{c^2}=1 \Rightarrow \sin^2A+\cos^2A=1$

上式兩邊同除以$\cos^2A$，則可得$\dfrac{\sin^2A}{\cos^2A}+1=\dfrac{1}{\cos^2A}=\sec^2A \Rightarrow \tan^2A+1=\sec^2A$

若將$\sin^2A+\cos^2A=1$ 的兩邊除以$\sin^2A$，則可得 $1+\cot^2A=\csc^2A$







注意：$\sin^2\theta=(\sin\theta)^2$　$\cos^2\theta=(\cos\theta)^2$

(e)餘角關係：直角三角形的兩銳角互爲餘角關係

$\sin(90°-\theta)$=__________　$\cos(90°-\theta)$=__________　$\tan(90°-\theta)$=_________

$\cot(90°-\theta)$=__________　$\sec(90°-\theta)$=__________　$\csc(90°-\theta)$=_________

上述的直角三角形ABC中，$\angle C=90°$，$\angle A+\angle B=90°$，我們可以觀察∠A的對邊剛好爲∠B的鄰邊，∠A的鄰邊剛好是∠B的對邊，由正弦和餘弦函數的定義可知：$\sin B=\dfrac{\angle B\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\cos A$。

(f)銳角三角函數範圍：　若 $0°<\theta<90°$，則

①$0<\sin\theta<1\Rightarrow$倒數$\csc\theta>1$②$0<\cos\theta<1\Rightarrow$倒數$\sec\theta>1$③$\tan\theta\in R\Rightarrow\cot\theta\in R$

(g)上述各種關係對於任意銳角θ都成立，根據這些關係，我們若知道sinθ，cosθ，tanθ，cotθ，secθ，cscθ六個三角函數值中之一個，就可推得他五個的值。

[例題6] 已知θ爲銳角且 $\tan\theta=\frac{5}{6}$，試求 sinθ，cosθ，tanθ，cotθ，secθ，cscθ之值。

Ans：$\sin\theta=\frac{5}{\sqrt{61}}$，$\cos\theta=\frac{6}{\sqrt{61}}$，$\tan\theta=\frac{5}{6}$，$\cot\theta=\frac{6}{5}$，$\sec\theta=\frac{\sqrt{61}}{6}$，$\csc\theta=\frac{\sqrt{61}}{5}$

[例題7] 設θ為銳角，且 $2\sin\theta+\cos\theta=2$，求 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 。

Ans：$\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=\frac{4}{5}$

[例題8] 設θ為銳角，且 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$，求下列各小題的值：

(1) $\sin\theta\cdot\cos\theta$　(2) $\sin\theta-\cos\theta$　(3) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$　(4) $\tan\theta+\cot\theta$ 。

Ans：(1) $\frac{7}{18}$　(2) $\frac{\pm\sqrt{2}}{3}$　(3) $\frac{22}{27}$　(4) $\frac{18}{7}$

(練習9) 求下列二小題的值：

(a) $\sin61^\circ\cdot\sec29^\circ+\sec^2 37^\circ-\tan^2 37^\circ=$？

(b) $\cos42^\circ\cdot\csc48^\circ-\csc^2 47^\circ+\tan43^\circ=$？

Ans：(a)2　(b)0

(練習10) 設θ為銳角，且令 $\tan\theta=k$，請用 k 表示下列各三角函數的值：

(1) $\sec\theta$　(2) $\cos\theta$　(3) $\sin\theta$　Ans：(1) $\sqrt{1+k^2}$　(2) $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$　(3) $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

(練習11) 設θ為銳角，且 $\tan\theta+\sec\theta=\frac{3}{2}$，試求 $\tan\theta=$？　Ans：$\frac{5}{12}$

(練習12) 設θ為銳角，$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$，請計算下列各小題的值：

(1) $\sin\theta\cdot\cos\theta$　(2) $\sin\theta+\cos\theta$　(3) $\tan\theta+\cot\theta$

Ans：(1) $\frac{3}{8}$　(2) $\frac{\sqrt{7}}{2}$　(3) $\frac{8}{3}$

(練習13) 設x為銳角且$\tan x+\cot x=\frac{5}{2}$，求下列各式之值：(1)$\sin x+\cos x$ (2)$\sin^3 x+\cos^3 x$

Ans：(1)$\frac{3\sqrt{5}}{5}$ (2)$\frac{9\sqrt{5}}{25}$

(練習14) 假設 $\cos\theta+3\sin\theta=2$，且 $0<\theta<90°$，求 $\cos\theta+\sin\theta$之值。Ans：$\frac{4+\sqrt{6}}{5}$

恆等式的證明

三角函數的關係式還可以幫助我們將涉及$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$，$\cot\theta$，$\sec\theta$或$\csc\theta$ 的式子，轉化成其他形式的式子。也就是三角恆等式：不論銳角的度數是多少，涉及三角函數的式子都成立。要證明這些恆等式成立，三角函數的關係式大致上可以依下列方法使用：

(a)三角函數的種類要統一

看到有$\tan\theta$，$\cot\theta$，$\sec\theta$，$\csc\theta$，利用倒數與商數關係化為$\sin\theta$，$\cos\theta$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$，$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$，$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$。

(b)看到 1

$1=\sin^2\theta+\cos^2\theta=\sec^2\theta-\tan^2\theta=\csc^2\theta-\cot^2\theta$

(c)看到$\sin\theta$，$\cos\theta$一定要隨時平方，其目的有二：

①全化為$\sin\theta$ (或$\cos\theta$)，可將函數種類統一

②利用$\sin^2\theta+\cos^2=1\Rightarrow\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

③將高次降為低次

例：$\sin^4\theta-\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1-2\sin\theta\cos\theta$

另外常常見到 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

【證明三角恆等式的原則】

1.由繁化簡：通常恆等式都是左式較繁，右式較簡，由左式出發逐步化成較簡單的式子。

2.相減為零：不太容易掌握方向，可以左右兩式相減導出結果為零，由此推論兩式相等。

3.化為同一式：當左右兩式複雜程度相近時，可以分別化成同一簡單式，使兩式相等。

4.單純化：將三角函數之種類單純化，例如一律化為$\sin\theta$與$\cos\theta$表示，再配合兩者的平方關係即可。

[例題9] (1)$\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$ (2)$\sin^6\theta+\cos^6\theta=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$

[例題10] 求證下列三角恆等式

(1)$\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=2\sec\theta$ (2)$\cot^4\theta+\cot^2\theta=\csc^4\theta-\csc^2\theta$

[例題11] 求證下列恆等式 $\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\sec\theta+\tan\theta=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

(練習15) 試證$\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$。

(練習16) $\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

(練習17) 設$f(n)=\cos^n\theta+\sin^n\theta$ ，試證明：$3f(4)-2f(6)=1$。

(練習18) 試化簡下列各式：

(1)$\dfrac{1}{1+\sin^2\theta}$ + $\dfrac{1}{1+\csc^2\theta}$ =______ 。

(2)$(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\csc\theta)$=______ 。 Ans：(1)1 (2)2

(練習19) 設$\cos A=\cos X\cdot\sin C$，$\cos B=\sin X\cdot\sin C$，試求$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$的值。
Ans：2

綜合練習

(1) 試求下列各式的值：

(a)$2\cos^2 30°-1$ (b)$2\sin 30°\cos 30°$ (c)$\dfrac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$ (d)$\sin 60°\cos 60°\tan 60°\cot 60°\sec 60°$

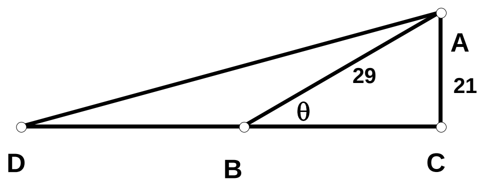
(e)$\tan 45°+\sqrt{3}\tan 60°-\sin^2 30°(f)1+\sin^2 45°-\tan 30°\cot 60°$

(2) 設 $0°<\theta<90°$，$\tan\theta=k$，則下列敘述何者正確？

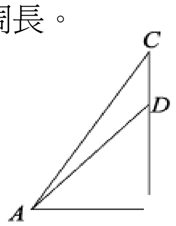
(A) $\sec\theta=\sqrt{k^2+1}$ (B) $\csc\theta=k^2+1$ (C) $\cot\theta=\dfrac{1}{k}$ (D) $\sin\theta=\dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ (E) $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ 。

(3) 設θ爲銳角，且 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，求$\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}$ + $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$ =？

(4) 如左下圖，若 $\sin\theta=\dfrac{21}{29}$，求 $\cot\dfrac{\theta}{2}$的值。

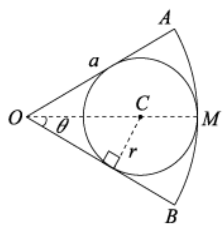


(5) 求一個半徑 r 的圓內接正 n 邊形與圓外切正 n 邊形的周長。



(6) 如圖，$\angle B=90°$，$3\overline{CD}=2\overline{BD}$，$\overline{AB}=\overline{BD}$，
則$\tan\angle CAD$之值爲__________ 。

(7) 如下圖所示：扇形OAB中，$\overline{OA}=\overline{OB}=a$，$\angle AOB=2\theta$，
已知扇形的內切圓半徑爲r，若以a及θ表內切圓半徑r，
則$r=$__________；又若$\theta=30°$，則比值$\dfrac{a}{r}=$__________ 。



(8) 設 $\tan\theta=3$，求

(a)$\dfrac{2\sin\theta+3\cos\theta}{\sin\theta-2\cos\theta}$ (b)$\dfrac{2\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta}$ 。

(9) 設θ爲銳角且 $7\sin\theta-\cos\theta=5$，求 $\sin\theta$=？

(10) 設θ爲銳角，若 $\cos\theta=\tan\theta$ ，求 $\sin\theta=$？

(11) 設$x^2-(\tan\theta+\cot\theta)x+1=0$ 有一根爲 $2+\sqrt{3}$，試求$\sin\theta\cos\theta$的值。

(12) 已知$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，且$\sin\theta$及$\cos\theta$爲 $2x^2+px+q=0$ 的兩個根，

則判別式$p^2-8q=$______。

(13) 設$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ，則求下列各小題的值：

(a)$\sin\theta\cdot\cos\theta=$____。(b)$\sin\theta-\cos\theta=$_____。

(c)$\sin^3\theta+\cos^3\theta=$_____。(d)$\sin^6\theta+\cos^6\theta=$______。

(14) θ爲銳角，求證下列三角恆等式：

(a)$\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}-\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=4\cot\theta\csc\theta$

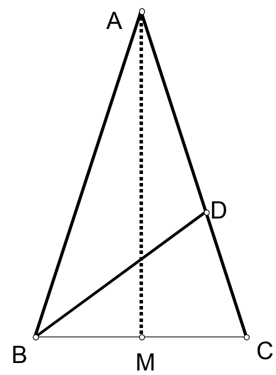
(b)$\cos^6\theta+\sin^6\theta=1-3\cos^2\theta+3\cos^4\theta$

(c)$\dfrac{1-\tan^4\theta}{\sec^2\theta}+2\tan^2\theta=\sec^2\theta$

(d)$\dfrac{\csc\theta-\cot\theta}{\sec\theta-\tan\theta}=\dfrac{\sec\theta+\tan\theta}{\csc\theta+\cot\theta}$

(e)$\dfrac{2\sin\theta(\sin\theta+1)}{1+\sin\theta+\cos\theta}=1+\sin\theta-\cos\theta$

(15) 試求$\dfrac{1}{1+\sin 7^\circ}+\dfrac{1}{1+\cos^2 5^\circ}+\dfrac{1}{1+\sec^2 5^\circ}+\dfrac{1}{1+\csc 7^\circ}=$____。



(16) 設ΔABC 中，$\cos\angle ABC=\dfrac{4}{5}$，$\cos\angle ACB=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\overline{BC}$之中點 M，

而$\overline{AH}\perp\overline{BC}$於 H，若$\overline{MH}=5$，求$\overline{BC}=$？

(17) △ABC 是一個頂角爲 36°的等腰三角形，

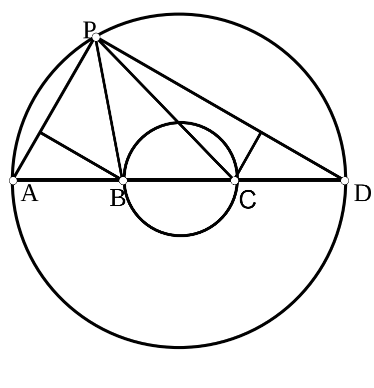
$\overline{AM}$與$\overline{BD}$分別是∠A 與∠B 的分角線，

如右上圖所示。試利用△BCD~△ABC，求 sin18°之值。

進階問題

(18) 銳角ΔABC之三邊長爲a,b,c，其所對應的高爲h_a , h_b , h_c，已知$\tan A=1$，$\tan B=2$，

$\tan C=3$，則$\dfrac{abc}{h_a h_b h_c}=$？



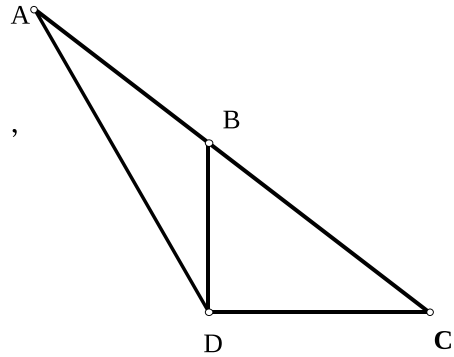
(19) 有二同心圓，外圓之一直徑 AD，被內圓三等份於

B、C，(如圖)，在外圓上任取異於 A,D 之一點爲 P，

設∠APB=α，∠DPC=β，試求 tanα·tanβ之值。

(20) 設$\tan\alpha$、$\tan\beta$為$x^2-ax+b=0$之二根，試以a,b表示$\cos^2\alpha-\sin^2\beta$之值。

(21) 設$x\cos\theta+y\sin\theta=4$，$x\sin\theta-y\cos\theta=3$，試求$x$與$y$的關係。



(22) 如右圖，$\angle BDC=90^\circ$，$\angle ADB=30^\circ$，A、B、C共線，且$\overline{AB}=\overline{CD}=1$，求$\overline{BC}$的長。

綜合練習解答

(1) (a)$\frac{1}{2}$ (b)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c)$\sqrt{3}$ (d)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (e)$\frac{15}{4}$ (f)$\frac{7}{6}$

(2) (A)(C)(D)(E)

(3) $\frac{7}{5}$

(4) $\frac{7}{3}$

(5) $2nr\sin\frac{180^\circ}{n}$，$2nr\tan\frac{180^\circ}{n}$

(6) $\frac{1}{4}$

(7) $r=\frac{a\sin\theta}{1+\sin\theta}$；3

(8) (a)9 (b)2 [Hint：(a)分子、分母同除以$\cos\theta$ (b) 分子、分母同除以$\cos^2\theta$]

(9) $\frac{4}{5}$ [Hint：$\cos\theta=7\sin\theta-5$，兩邊平方，再利用$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，化成$\sin\theta$的二次方程式，再解出$\sin\theta$]

(10) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(11) $\frac{1}{4}$

(12) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

(13) (a)$-\frac{1}{4}$ (b)$\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ (c)$\frac{5\cdot\sqrt{2}}{8}$ (d) $\frac{3}{4}$

(14) 略

(15) 2

(16) $\overline{BC}=22$

(17) $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

(18) $\dfrac{5}{3}$ (Hint：考慮$\dfrac{c}{h_a},\dfrac{b}{h_c},\dfrac{a}{h_b}$的值)

(19) $\dfrac{1}{4}$

(20) $\dfrac{1-b^2}{a^2+(1-b)^2}$

(21) $x^2+y^2=25$

(22) $\sqrt[3]{2}$