§3-4 對數函數與指數函數

(甲)對數函數的微分與積分

(1)要討論對數函數的導函數，首先觀查察$f(x)=\log_a x$在$x=1$處的導數。

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{\log_a^x-\log_a^1}{x-1}=\log_a^{x^{1/x-1}}$，故$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\log_a^{x^{1/x-1}}$

要求上式的級限值，要先知道$\lim\limits_{x\to1}x^{1/x-1}$之值，令$t=x-1$，則可得：

$\lim\limits_{x\to1}x^{1/x-1}=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{1/t}$，是故我們必須對 $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{1/t}$作一些探討。

(a)e的引進：

根據前面的證明，可定義$e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n\Rightarrow e=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$，令$t=\dfrac{1}{x}\Rightarrow\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{1/t}=e$

(b)對數函數的導函數

$f(x)=\log_a x\Rightarrow f'(x)=$？

設α為正數，計算$f'(\alpha)=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\log_a(\dfrac{x}{\alpha})^{\frac{1}{x-\alpha}}$

因為$\lim\limits_{x\to\alpha}(\dfrac{x}{\alpha})^{\frac{1}{x-\alpha}}=\lim\limits_{t\to0}(\dfrac{t+\alpha}{\alpha})^{\frac{1}{t}}=e^{\frac{1}{\alpha}}$

$\Rightarrow f'(\alpha)=\log_a e^{\frac{1}{\alpha}}=\dfrac{1}{\alpha}\cdot\log_a e$。

結論：

(1)$f(x)=\log_a x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}\log_a e$ 即$(\log_a^x)'$與$\dfrac{1}{x}$成正比，比例常數為$\log_a e$。

(2)考慮$a=e$，在數學及其他科學中經常會碰到，所以特稱為自然對數函數，符號$\log_e^x=\ln x$。

(3)$\dfrac{d}{dx}(\ln x)=\dfrac{1}{x}$

(4)$\dfrac{d}{dx}(\log_a x)=\dfrac{1}{x}(\log_a x)=\dfrac{1}{x}\ \dfrac{1}{\ln a}$

(5)$\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$

[例題1] 試求下列各小題$f^{/}(x)$

(1) $f(x)=\ln(\sin x)0<x<\pi$ (2) $f(x)=\ln(x^2+4)$

(3) $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$ (4) $f(x)=\log_5^{(x^3+4)}$ (5) $f(x)=\log_3^{\sin x}$

(6) $f(x)=\log_3^{\sqrt{x^2-x+1}}$

[例題2] 試求下列各題的導函數：

(1)設 $y=\ln\left|f(x)\right|$ ，試證： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f^{/}(x)}{f(x)}$ 。

(2) $y=(x+1)(x^2+1)(x+2)^2$

(3) $y=\dfrac{(x-3)^3(x-1)^4}{(x+2)^2}$ (4) $y=\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

Ans：(2) $y^{/}=(x+1)(x^2+1)(x+2)^2(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{2}{x+2})$

(3) $y^{/}=\dfrac{(x-3)^3(x-1)^4}{(x+2)^2}(\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{2}{x+2})$ (4) $y^{/}=\dfrac{1}{\cos x}\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

(練習1) 試求下列各導函數：

(1) $y=\log_{2}^{(x\cdot\sin x)}$ (2) $f(x)=\ln(x^3\cdot\ln x)$

(3) $y=\log_{10}^{(\sec x+\tan x)}$ (4) $y=\log_{3}^{\sqrt{x^2-x+1}}$

Ans：(1)$\dfrac{1}{\ln 2}(\cot x+\dfrac{1}{x})$ (2)$\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x\ln x}$ (3)$\dfrac{\sec x}{\ln 10}$ (4)$\dfrac{2x-1}{2(x^2-x+1)\ln 3}$

(練習2) 試求$\dfrac{dy}{dx}$ ： $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ (2)$y=x^{\sin x}$

Ans：

(1) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4})$

(2) $x^{\sin x}(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x})$

[例題3] (1)$\int_1^3\dfrac{dx}{x+1}dx=?$ (2)$\int_0^1\dfrac{x}{x^2+2}dx=?$

(3)$\int_{-1}^0\dfrac{x^2-2}{x^3-6x+1}dx=?(4)\int_0^{\pi/3}\tan x dx=?$

(5)$\int_1^e\dfrac{\ln x^2}{x}dx=?$ (6)$\int_e^{e^2}\dfrac{1}{x\ln x}dx$

Ans：(1)ln2 (2)$\dfrac{1}{2}$(ln3−ln2) (3)$\dfrac{-1}{3}\cdot$ln6 (4)ln2 (5)1 (6)ln2

(練習3) (1) $\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}dx=?$ (2) $\int_1^e \frac{\ln x^4}{3x}dx=?$

(3) $\int_1^e \frac{(\ln x^3)^2}{x}dx=?$(4) $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cot x\,dx=?$

Ans：(1)ln5 (2)$\frac{4}{3}$ (3)3 (4)ln2

[例題4] $y=\frac{1}{x}$與 x=2，x=4，x 軸圍成之面積為何?又此區域繞 x 軸旋轉一周所得的立體體積為何? Ans：ln2，$\frac{\pi}{4}$

[例題5] (1)若x>0，試證 $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$。

(2)當x>0 時，試討論 $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$ 的增減情形。

(3)若 $0<a<b$，試比較$(1+a)^b$與$(1+b)^a$之大小。

[例題6] 試求$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=?$ Ans：ln2

(乙)指數函數的微分與積分

(1)指數函數的導函數

$(a^x)' = \ln a\cdot a^x$

[證明]：設$f(x)=a^x$，$g(x)=\log_a x\Rightarrow h(x)=g(f(x))=x$

$\Rightarrow h'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)=1 \Rightarrow (\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{a^x})\cdot f'(x)=1$

$\Rightarrow f'(x)=\ln a\cdot a^x$。

特別：當$a=e$時，可得$(e^x)'=e^x$

結論：

(1) $(a^x)' = \ln a\cdot a^x$ (2) $(e^x)'=e^x$

[例題7] 求(1)$\frac{d}{dx}(a^{bx})$ = ? (2) $\frac{d}{dx}(x^r)$= ?

[例題8] 試求下列各導函數：

(1) $y=e^{x^2}$ (2) $y=x^2e^{2x}$ (3) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$ (4) $y=e^{(\ln x)^2}$ (5) $y=e^{\sin x^2}$

Ans：(1) $2xe^{x^2}$ (2) $2xe^{2x}+2x^2e^{2x}$ (3) $\frac{xe^{\sqrt{x^2+}}}{\sqrt{x^2+1}}$ (4) $e^{3x}(2x+3x^2)$

(5) $2x\cos x^2 e^{\sin x^2}$

[例題9] 求下列各導函數：

(1)$y=4^{6x}$ (2) $y=10^{x^2}$ (3)$y=3x^2$ (4)$y=x^3\cdot 7^x$ (5) $y=2^{e^{2x}}$

Ans：(1)$6\ln 4\cdot 4^{6x}$ (2)$2\ln 10\cdot x\cdot 10^{x^2}$ (3)$6x$

(4) $7^x\cdot x^2\cdot(3+x\ln 7)$ (5) $2e^{4x}\cdot 2\ln 2$

(練習4) 若已知$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x},\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$ ，則試導出$\frac{d}{dx}(\log_a^x)$ =? $\frac{d}{dx}(a^x)$=?

(練習5) (1)$\frac{d}{dx}(e^{\sin x^2})$ = ? (2)$\frac{d}{dx}(x^2\cdot e^{3x})$ = ? (3)$y=(1-e^{4x})^2$，y'= ?

(4) $y=2^{5x}\cdot 3^{x^2}$ y' = ? (5) $f(x)=2^{4x^2+1}$ $f'(1)$ = ?

Ans：(1)$2x\cos x^2 e^{\sin x^2}$ (2)$e^{3x}(2x+3x^2)$ (3)$8e^{4x}(e^{4x}-1)$ (4)$3^{x^2}\cdot 2^{5x}(5\ln 2+2x\ln 3)$

(2)指數函數的積分

(a)$\int_a^b e^x dx=e^x|_\alpha^\beta$

(b)$\int_\alpha^\beta a^x dx=\frac{1}{\ln a}\cdot a^x|_\alpha^\beta$

[例題10] 試求下列各積分的值：

(1)$\int_0^1 e^{2x}dx$ =? (2)$\int_1^2 2^x dx$ =? (3)$\int_0^1 xe^{x^2}dx$ =?

(4)$\int_0^1(e^x+e^{-x})^2 dx$ =? (5)$\int_0^1(3x^2+1)\exp(x^3+x-1)dx$ =?

Ans：(1)$\frac{1}{2}(e^2-1)$ (2)$\frac{2}{\ln 2}$ (3)$\frac{1}{2}(e-1)$ (4)$\frac{1}{2}(e^2-e^{-2})+2$ (5)$e-e^{-1}$

(練習6) (1) $\int_0^2 (3e^x+1)dx=$? (2) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx=$? (3) $\int_1^2 (e^x-\frac{2}{x})dx=$?(4) $\int_0^2 5^x dx=$?

Ans：(1) $3e^2-1$ (2) $\ln(e+1)-\ln 2$ (3) $e^2-2\ln 2-e$ (4) $\frac{24}{\ln 5}$

[例題11] 關於曲線Γ：$y=\ln x$

(1)過原點 O 與 Γ 相切之直線方程式為?

(2)曲線Γ與切線 L 及 x 軸所圍成之曲域 R 的面積為何？

(3)R 繞 y 軸旋轉，所得的旋轉體體積=？Ans：(1)$y=\frac{1}{e}x$ (2)$\frac{e-2}{2}$ (3)$\pi(\frac{e^2}{6}-\frac{1}{2})$

[例題12] (1)$x>0$，證明：$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$。

(2)試求 $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot e^{-x}=$？ 0

(3)試描繪$f(x)=x\cdot e^{-x}$之圖形，並求其極值及漸近線方程式。

Ans：(2)0

(練習7) 求二曲線 $y=e^x$, $y=e^{-x}$ 與二直線 $x=1$，$x=-1$ 所圍成區域之面積。

Ans： $2(e+e^{-1})-4$

(練習8) $y=f(x)=x\cdot e^x$，試求(1) $f'(x)=?$ (2) $f''(x)=?$ (3)極小點 (4)反曲點

Ans：(1) $e^x(x+1)$ (2) $e^x(x+2)$ (3) $(-1,-\frac{1}{e})$ (4) $(-2,-\frac{2}{e^2})$

(練習9) 曲線$y=e^x$與直線$x=1$，$x=-1$ 及x軸所圍成的區域爲R。

(1)R的面積爲? (2)R繞x軸旋轉所得的體積爲?

Ans：(1)$e-\frac{1}{e}$ (2)$\frac{\pi}{2}(e^2-e^{-2})$

(丙)積分的技巧

(1)分部積分法：

設 $u(x)$、$v(x)$均爲一階連續可微分

因爲 $d(uv)=udv+vdu$

兩邊積分可得 $uv=\int u\,dv+\int v\,du$ 。

$\Rightarrow \int u\,dv = uv-\int v\,du$ 。這稱爲不定積分的部分分式公式。

部分分式將需要計算的積分$\int u\,dv$轉化爲另一個積分$uv-\int v\,du$，因此計算的關鍵是選取適當的函數 $u(x)$、$v(x)$。

[例題13] 計算下列不定積分：

(1)$\int xe^x\,dx$ (2)$\int x\cdot(\ln x)^2\,dx$

Ans：(1)xe^x-e^x+C (2)$\frac{1}{2}(x^2\cdot(\ln x)^2-x^2\cdot\ln x+\frac{x^2}{2})+C$

[例題14] 設$I_m=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$，請利用分部積分法建立

遞迴式$I_m=\dfrac{x}{(x^2+a^2)^m}+2m(I_m-a^2\cdot I_{m+1})$。

(練習10) 計算下列不定積分：

(1)$\int e^{ax}\sin bx\,dx$　(2) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

Ans：(1)$\dfrac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)+C$　(2) $\dfrac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)+C$

(練習11) 計算下列不定積分：

(1)$\int x\cdot\cos 2x\,dx$　(2)$\int x^2\cdot\sin 2x\,dx$　(3)$\int x\cdot\tan^{-1}x\,dx$

[提示：$\dfrac{d(\tan^{-1}x)}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$]

Ans：(1)$\dfrac{1}{2}(x\cdot\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x)+C$　(2) $\dfrac{1}{2}(x\cdot\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x-x^2\cos 2x)+C$

(3)$\dfrac{1}{2}[(x^2+1)\tan^{-1}x-x]+C$

(練習12) 計算$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln x\,dx=$？　Ans：$\dfrac{2}{e}$

(練習13) $\int_0^1\dfrac{e^{3x}}{e^x+1}dx=$?　(2)$\int_0^1\dfrac{1}{e^x+1}dx=$?

Ans：(1)$\dfrac{e^2}{2}-e+\ln\dfrac{e+1}{2}+\dfrac{1}{2}$ (2)$1-\ln(e+1)+\ln 2$

[提示：可令$u=e^x$]

(2)有理函數、三角有理函數的積分法：

(a)有理函數的積分法：

設 P(x)、Q(x)是 x 的多項式，$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$稱爲 x 的有理函數，記爲 R(x)= $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

當 degP(x)≥degQ(x)時，R(x)= $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=f(x)+\dfrac{P'(x)}{Q(x)}$ ，其中$\dfrac{P'(x)}{Q(x)}$爲真分式，因此對於 R(x)不定積分的計算只須考慮真分式不定積分的計算。

設P(x)爲首項係數=1 的n次實係數多項式，利用代數基本定理與實係數方程式虛根成對的性質，可將P(x)化成

$P(x)=(x-a_1)^{i_1}(x-a_1)^{i_2}\ldots(x-a_s)^{i_s}(x^2-p_1x+q_1)^{j_1}(x^2-p_2x+q_2)^{j_2}\ldots(x^2-p_tx+q_t)^{j_t}$

$p_k^2-4q_k<0$。$1\le k\le t$，

因此 $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ 總能分解成下列 4 種最簡分式的和：

$\dfrac{A}{x-a}$、$\dfrac{A}{(x-a)^m}$、$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$、$\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$

(m>1，$p^2-4q<0$)，其中A、B爲不同時爲 0 的常數。

因爲$x^2+px+q=(x+\dfrac{p}{2})^2+q-\dfrac{p^2}{4}$，所以我們還可將上面四個型式再作進一步簡化，

可得 4 種最簡分式的和：$\dfrac{1}{x-a}$、$\dfrac{1}{(x-a)^m}$、$\dfrac{1}{x^2+a^2}$、$\dfrac{1}{(x^2+a^2)^m}$

而這些最簡的分式都是可以積分的：

$\displaystyle\int\frac{1}{x-a}\,dx=\ln|x-a|+C$

$\displaystyle\int\frac{1}{(x-a)^m}\,dx=\frac{1}{1-m}(x-a)^{1-m}+C$

$\displaystyle\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}(\tan^{-1}\frac{x}{a})+C$

$\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+a^2)^m}=I_m$，由分部積分法可得遞迴式$I_m=\dfrac{x}{(x^2+a^2)^m}+2m(I_m-a^2\cdot I_{m+1})$，

因爲$I_1=\dfrac{1}{a}(\tan^{-1}\dfrac{x}{a})+C$，可以計算出$I_m$。

總之，根據上面的推導可知，有理函數的積分，理論上而言均可以積分出來，只要我們能將有理函數分解成一些最簡分式的和。

[例題15] 計算不定積分：$\displaystyle\int\frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)}dx$。Ans：$\dfrac{1}{9}[2\ln|x+1|+7\ln|x-2|-\dfrac{15}{x-2}]+C$

[例題16] 求不定積分：$\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}dx$。Ans：$\frac{1}{4}\ln\frac{1+x^2}{(1+x)^2}+\frac{x-1}{2(1+x^2)}+C$

(b)三角有理函數的積分：

三角有理函數是由 sin$x$、cos$x$ 與常數經過有限次四則運算而得到的代數有理式，記爲 R(sin$x$,cos$x$)。對有理函數的不定積分 $\int R(\sin x,\cos x)dx$，可以令 $t=\tan\frac{x}{2}$ 後，一定能化成 t 的有理函數的不定積分 $\int R_1(t)dt$，在根據有理函數的不定積分法去求不定積分 $\int R_1(t)dt$。

[過程]：$t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \int R(\sin x,\cos x)dx=\int R(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$。

[例題17] 求不定積分 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=$？Ans：$\tan\frac{x}{2}-2\ln|\cos\frac{x}{2}|+C$

(練習14) 求不定積分：$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx=$？Ans：$\frac{-3}{2}\ln|x|+\frac{5}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+2|+C$

(練習15) 求不定積分：$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx=$？ Ans：$x-\tan\frac{x}{2}+C$

(練習16) (a) $\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{\sin x}dx=?$ (b) $\int_0^{\pi/3}\frac{1}{\cos x}dx=?$ (c) $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\sin x}dx=?$

Ans：(a)$\ln\sqrt{3}$ (b)$\ln(2+\sqrt{3})$ (c)1

(丁)指數函數的應用

(1)一個現象的成長或衰微的狀況，如果能以函數來表示，則通常可以該函數的導函數來表示變化率。

(2)假設某一現象的變化率與現象本身成正比，則這種現象與指數函數有密切的關係。

[例題18] 細菌在適當的環境下繁殖的速度與當時的細菌數成正比，若t時刻的細菌數為$f(t)$，則在t時刻細菌的增加率$f'(t)$與$f(t)$成正比。假設t=0 時的細菌數為n_0，而$f'(t)=kf(t)(k>0)$，求時刻a時的細菌數。

[例題19] 放射性元素的衰變率與當時原子核數量成正比。意思是說：若在t時刻的原子核數為$f(t)$，則在時刻t衰變的速度$f'(t)$與$f(t)$成正比(但比值為負數)。假設t=0 時原子核的數為n_0，而$f'(t)=-kf(t)(k>0)$，求時刻a時的原子核數$f(a)$。

(練習17) (1)上例中，設原子核經過 T 時刻數量會減至原來的一半，此時 T 稱為半衰期。求上例中 T=？　Ans：$\dfrac{\ln 2}{k}$

(2)鐳之半衰期為約 1600 年，今有 150mg 之純鐳，

(a)試求經過 t 年後之剩餘量。(b)經過多少年僅存 30mg。

Ans：$150\times 2^{\frac{-t}{1600}}$，3715 年。

[例題20] 牛頓的冷卻定律是說

物體溫度的變率(冷卻)跟物體溫度與周圍的溫度之差成正比。
假設有一支金屬棒放入水中，如果水的溫度保持固定為 20°C，而 2 分鐘後金屬棒的溫度由 50°C 降到 40°C，試求 6 分鐘後金屬棒的溫度。
Ans：$\frac{260}{9}$°C

(練習18) 小明在大湖邊烤肉，湖水溫度測定為 $20^\circ c$，10 點正時，他把一根熱金屬棒放入水中，10 點零 2 分取回金屬棒，測得其溫度為 $40^\circ c$，然後立刻把金屬棒又放入湖水中。10 點零 6 分，取出再測其溫度為 $30^\circ c$。問小明第一次把金屬棒放入水中時，金屬棒的溫度約為多少度？
(A)30°C~40°C (B)40°C~50°C (C)50°C~60°C D)60°C~70°C(E)70°C~80°C
Ans：(B)

綜合練習

1. 求下列各小題的導數或導函數：
(a)$f(x)=\ln(\cos x)$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$ (b) $f(x)=\exp(x^3+x-1)$ (c) $f(x)=\log_4^{(x^4+1)}$
(d) $f(x)=3^{x^2+1}$ (e) $\frac{d}{dx}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ (f) $f(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}$, $f''(0)=$？
Ans：(a)$f'(x)=-\tan x$ (b)$f'(x)=(3x^2+1)\exp(x^3+x-1)$ (c) $f'(x)=\frac{2x^3}{\ln 2\cdot(x^4+1)}$
(d) $f'(x)=(2\ln 3)x\cdot 3^{x^2+1}$ (e)$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (f)1

2. 試求下列各定積分之值：
(a)$\int_1^e \frac{\ln x^4}{x}dx$ (b)$\int_0^1 3^{2x}\,dx$ (c)$\int_0^1 3^{\sin x}\cos x\,dx$ (d)$\int_0^4 (\frac{1}{x+1}+2x)\,dx$
(e)$\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}dx$ (f)$\int_0^2 3xe^{x^2}\,dx$ (g)$\int_1^5 (e^{x+1}+1)\,dx$
Ans：(a)2 (b)$\frac{4}{\ln 3}$ (c) $\frac{1}{3}(e-1)$(d)16+ln5 (e)ln5(f)$\frac{3}{2}(e^4-1)$ (g)e^6-e^2+4

3. 求下列不定積分：
(a)$\int\cos(\ln x)dx$ (b)$\int x(\ln x)dx$ (c)$\int\sec^3 x\,dx$
Ans：(a)$\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C$ (b)$\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$ (c)$\frac{1}{2}[\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|]+C$

4. 試求下列各定積分之值：

(a) $\int_{e}^{e^2}\frac{dt}{1-t^2}$ (b) $\int_{3}^{5}\frac{1}{(x-2)(x+3)}dx$ (c) $\int_{1}^{2}\frac{3x+1}{2x^2+3x-2}dx$

Ans:(a)$\frac{1}{2}\ln\frac{(e+1)^2}{e^2+1}$ (b)$\frac{1}{5}\ln\frac{9}{4}$ (c)$\ln\frac{4}{\sqrt{3}}$

5. (a)試求 $y=\ln 5x$ 在點 $(\frac{1}{5},0)$ 的切線方程式。

(b)設曲線 $y=e^{\sin x}(0\le x\le\frac{\pi}{2})$ 的反曲點爲 $(a,e^{\sin a})$ ，則 $\sin a=$____ 。

Ans：(a)$5x-y-1=0$(b)$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

6. 設 $a>0$ ，令 R 表示由 x 軸、y 軸，直線 x=a，以及曲線 $y=\frac{1}{x+1}$所圍成之區域。試求

(a)R 繞 x 軸旋轉。所得旋轉體之體積。

(b)R 繞 y 軸旋轉。所得旋轉體之體積。

Ans：(a)$\frac{\pi a}{1+a}$(b)$2a\pi-2\pi\ln(1+a)$

7. 試證：不論 x 是任何正數，$1-\frac{1}{x}\le\ln x\le x-1$都成立。

8. 試證：不論x是任何的實數，$e^x\ge 1+x$都成立。

9. (a)設r爲大於 1 的正數，試證：$(1-x)^r>1-rx$對每一個小於 1 但不爲 0 的x都成立。

(b)利用(a)證明：若$-1<b<a<0$ ，則$(1+b)^{\frac{1}{b}}>(1+a)^{\frac{1}{a}}$ 。

10. 試討論 $y=\frac{\ln x}{x^2}$ 的增減情形，並求其極值。

Ans：當 $0<x<\sqrt{e}$ 時爲增函數，當 $x>\sqrt{e}$ 時爲減函數；極大值$\frac{1}{2e}$。

11. 一放射性元素的樣本在 10 年內衰變了 80%，則此放射性元素之半衰期爲何？

Ans：$10\log_5 2$ 年

12. 設 $f(x)=xe^x$ ，(a)試求 $f'(x), f''(x), f'''(x)$ 。

(b)試由(1)推測 $f^{(n)}(x)$ ，並利用數學歸納法證明之。

13. 設函數 $F(x)=\int_0^x t\sin t\,dt$ 。考慮此$(0,\frac{7\pi}{2})$內

(a)已知$x=x_0$時F(x)有最小値，則x_0爲

(A)π (B)$\frac{3\pi}{2}$ (C)2π (D)$\frac{5\pi}{2}$ (E)3π Ans：(C)

(b)此函數在開區間$(0,\frac{7\pi}{2})$內有多少個反曲點？

(A)0 個(B) 1 個(C) 2 個(D) 3 個(E) 4 個 Ans：(D)

14. 設$z=\dfrac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}$的實部為$\Re(z)$，則$|z|$=______，$\int_0^{\pi}\Re(z)\,d\theta$=______。

Ans：1　,2

15. 定積分 $\ln a=\int_1^a \frac{1}{x}dx$ 可視為 $f(x)=\frac{1}{x}$與 $x=1$，$x=a$，x 軸所圍成的面積，

其中 a 為正數。

(a)試證：若 $0<a<b$，則$\ln a<\ln b$

(b)已知 $\ln e=1$，以定積分的性質，證明 $2<e<3$。(已知 $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{12}>1$)

16. (a)設 k 為自然數，證明：$\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$。 (考慮$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$的幾何意義)

(b)利用(a)推導出$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}<\ln(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，並藉此解釋$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$為發散級數。

17. 計算$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$，$n=0,1,2,..$

(a)請利用分部積分法求出遞迴式$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}$。

(c)請計算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx=$？　　Ans：$\frac{8}{15}$

(b)$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}$，$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$。

18. 設$I_n(x)=\int_0^x\frac{t^n}{\sqrt{t^2+a^2}}dt$　($a>0$，n為自然數)

證明當$x\geq 2$ 時，$nI_n(x)=x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2}-(n-1)a^2I_{n-2}(x)$。

19. 警方在早上 7：00 發現一具屍體，法醫測得屍體的溫度是 23.1°C，屍體所在房間的溫度是 12.1°C。兩個小時之後他又測了一次，屍體的溫度是 17.6°C。由此法醫根據牛頓冷卻定律可以得知這個人的死亡時間是何時？

Ans：約發現屍體的 2.36 小時前

20. 中國學者在長沙市馬王堆漢朝墓地於 1972 年出土，考古學家測得同時出土的木炭標本的C^{14}原子衰變為每分鐘 29.78，而考古學家在測得新燒成的木炭的C^{14}原子衰變為每分鐘 38.37 次，試估計該墓地建成的年代。

(C^{14}的半衰期為 5730 年)

Ans：$\frac{5730}{\ln 2}\ln\frac{29.78}{38.37}$ (約 2085)年