

105 學年度第二學期第二次定期考高二數學試題(社)

一、填充題(每格 6 分，共 48 分)

1. 設 a 為實數，若方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ a+4 & a+1 \end{bmatrix}$ 的反方陣不存在，則 a 的值為 (1)。
2. 已知二階方陣 A 、 B 滿足 $A+2B = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}$ 且 $2A+B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 13 & -3 \end{bmatrix}$ ，
則 $AB =$ (2)。
3. 設兩相交直線 $L_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-5}{1}$ 與 $L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{4}$ 的夾角為 θ ，
則 $\sin \theta$ 的值為 (3)。
4. 設 $\vec{a} = (1, 2, 3)$ 、 $\vec{b} = (2, -3, -1)$ 、 $\vec{c} = (1, -2, -2)$ 、 $\vec{d} = (4, 7, 9)$ ，已知
 $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ，其中 x, y, z 為實數，則有序數組 $(x, y, z) =$ (4)。
5. 設 a, b, c, d 為實數且 $ab \neq 0$ ，已知兩直線 $L_1: \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+y-z=6 \end{cases}$ 與
 $L_2: \frac{x-c}{1} = \frac{y-d}{a} = \frac{z}{b}$ 重合，則有序數組 $(a, b, c, d) =$ (5)。
6. 已知 A 為二階方陣滿足 $A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $A^5 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ，則 $A^4 =$ (6)。
7. 設 a, b, c, d 為實數，已知矩陣 $\begin{bmatrix} a & b & 2 & 3 \\ c & d & 3 & 5 \end{bmatrix}$ 經由列運算後得 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ ，
則矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$ (7)。
8. 已知 $A(0, 1, 1)$ 、 $B(1, 3, -1)$ 、 $C(-2, 7, -1)$ 、 $D(k, k, -k)$ ，其中 k 為實數，若直線 AB 與直線 CD 相交於一點，則其交點坐標為 (8)。

二、多重選擇題(每題 8 分，共 32 分)：

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 6 分；答錯 2 個選項者，得 4 分；答錯 3 個選項者，得 2 分；答錯多於 3 個選項或所有選項均未作答者，該題以 0 分計算。

1. 已知直線 $L: \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ ，請選出正確的選項：

(1) 直線 L 與平面 $E_1: x+2y+3z=0$ 垂直

(2) 直線 L 與平面 $E_2: x-2y+z=0$ 平行

(3) 直線 L 與直線 $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 平行

(4) 直線 L 與直線 $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$ 垂直

(5) 直線 L 與直線 $L_3: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ 歪斜

2. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 且 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 。請選出

正確的選項：

(1) $A \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ (2) $A \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (3) $A \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$

(4) $A^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}$ (5) $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. 設 A 與 B 皆為 n 階方陣， I 為 n 階單位方陣，請選出正確的選項：

(1) 若 $AB = A$ ，則 $BA = A$

(2) 若 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ，則 $AB = BA$

(3) 若 $(AB)^2 = A^2B^2$ ，則 $AB = BA$

(4) 若 $A+B = I$ 且 $A^2 = A$ ，則 $B^2 = B$

(5) 若 $2A - B = I$ 且 $A^2 = A$ ，則 $B = I$ 或 $B = -I$

4. 設 A 與 B 皆為二階方陣， I 為二階單位方陣， O 為二階零方陣，請選出正確的選項：

(1)若 $AB = I$ ，則 $BA = I$

(2)若 $A^3 = I$ ，則方陣 A 有乘法反方陣

(3)若 $A^2 - A - 2I = O$ ，則方陣 $A + I$ 有乘法反方陣

(4)若 $AB = A + B$ ，則方陣 $A - I$ 有乘法反方陣

(5)若 $AB = I$ ，則方陣 $A + B$ 有乘法反方陣

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 空間中，已知 $P(3,1,2)$ ，兩歪斜線 $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{-3}$ ，

$$L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{1}，$$

①求過 P 點且包含直線 L_1 的平面方程式。(4 分)

②已知 A 為直線 L_1 上一點， B 為直線 L_2 上一點，且 A 、 P 、 B 三點共線，求 A 點坐標與 B 點坐標。(6 分)

2. 在故事開始前的一百年，巨人突然出現，毫無理由地就將人類消滅大半。殘餘的人類居住在三道同心圓的高牆中，人類為了對抗巨人而設置了兵團，其中駐守在高牆內的兵團為「駐紮兵團」與「憲兵團」，兩個兵團於年底評估士兵的績效時，每個兵團皆有 60% 的士兵被評為甲等，另外 40% 的士兵被評為乙等，並依據績效結果進行每一年一次的士兵輪調，輪調規則如下：

(a)「駐紮兵團」被評為甲等的士兵有 10% 調到「憲兵團」，90% 留在「駐紮兵團」。

(b)「駐紮兵團」被評為乙等的士兵留在「駐紮兵團」。

(c)「憲兵團」評為甲等的士兵留在「憲兵團」。

(d)「憲兵團」評為乙等的士兵有 60% 調到「駐紮兵團」，40% 留在「憲兵團」。

已知原本「駐紮兵團」與「憲兵團」士兵人數占駐守在高牆內士兵總人數的 50%與 50%，假設駐守在高牆內士兵的總人數不變，且評估績效與輪調規則不變。

- ①經過輪調兩次之後，求「駐紮兵團」與「憲兵團」士兵人數占駐守在高牆內士兵總人數的比例各別是多少？(6 分)
- ②已知經由不斷的輪調之後兩個兵團的士兵人數占駐守在高牆內士兵總人數的比例趨近於穩定狀態，求穩定狀態時「駐紮兵團」與「憲兵團」士兵人數占駐守在高牆內士兵總人數的比例各別是多少？(4 分)