

105 學年度第二學期第一次定期考高二數學試題

一、單選題：20%(每題 4%)

1. 設 P, Q 為平面 $ax+by+cz=207$ 上相異兩點，且 $\overrightarrow{PQ}=(x_0, y_0, z_0)$ ，則

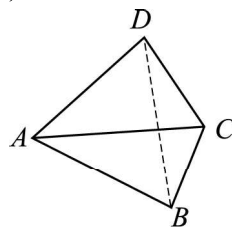
$\overrightarrow{PQ} \cdot (a, b, c)$ 為何？

(1) 不定值，隨 (x_0, y_0, z_0) 而改變 (2) 25 (3) 5 (4) 0 (5) -1

2. 如下圖是正四面體，且 $A(3, 0, 0), B(0, 3, 0)$ ，

$C(0, 0, 3), D(3, 3, 3)$ ，試問四面體 $ABCD$ 的體積為何？

(1) 6 (2) 9 (3) 12 (4) 18 (5) 24



3. 三旺寶地 音樂季的廣場上有照明燈 A, B ，現素還真 建置一個空間坐標系

得 $A(1, 3, 5), B(9, 7, 5)$ ，在廣場地面上，即 xy 平面上，想找動點 $P(x, y, 0)$ ，

使得 $\overline{PA} \perp \overline{PB}$ ，試問 P 點的個數為何？

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 無限多

4. 若四面體 $S-ABC$ 的底 ABC 不是等邊三角形，側面與底面所成的二面角均等，

且頂點在底面的投影點 O 在 $\triangle ABC$ 內部，則 O 是 $\triangle ABC$ 的

(1) 垂心 (2) 重心 (3) 外心 (4) 內心 (5) 旁心

5. 在坐標空間中，有一邊長為 2，中心在原點 O 的正立方體 Ω ，且各稜邊都與

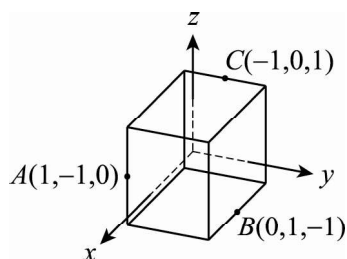
三坐標平面平行或垂直，如圖所示。已知 $A(1, -1, 0), B(0, 1, -1), C(-1,$

$0, 1)$ 這三點都是某平面 E 和正立方體稜邊的交點。試問下列哪些點

也是平面 E 和正立方體稜邊的交點？

(1) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ (2) $(-1, 1, 0)$ (3) $(0, -1, -1)$

(4) $(-2, 1, 1)$ (5) $(0, 0, 0)$



二、多選題：16%(每題8%,錯一選項扣3%,錯三選項或三選項以上該題0%)

1. 下列敘述何者正確？

- (1)在空間中，恰有一個平面通過已知相異三點。
- (2)在空間中，任意兩相異直線一定有公垂線。
- (3)在空間中，若相異兩平面 E_1, E_2 平行，且直線 L_1 在 E_1 上，直線 L_2 在 E_2 上，則 L_1, L_2 必平行。
- (4)在空間中，過已知直線外一點，恰有一平面與此直線平行。
- (5)在空間中，設直線 L 與平面 E 相交於 A 點，若 E 上有二條通過 A 點的相異直線與 L 垂直，則 L 與 E 垂直。

2. 正四面體的四個頂點落在以原點 $O(0, 0, 0)$ 為球心，半徑為1的球面上，已知一頂點 P 的坐標為 $(0, 0, 1)$ ，另一頂點 Q 的坐標為 (a, b, c) 。下列選項有哪些必定是正確的？

- (1) \vec{OP} 與 \vec{OQ} 的夾角為 120°
- (2) $a^2 + b^2 > c^2$
- (3) $ab > 0$
- (4) $c < 0$
- (5) $a^2 + b^2 > 1$

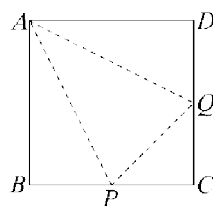
三、填充題：55% (每格 5%)

1. 設空間中有一點 O ，在 E 平面的投影為 A ， A 在平面 E 上的一直線 L 的投影為 B ，而 L 上另有一點 C ，若 $\overline{BC} = 12$ ， $\overline{OC} = 13$ ， $\overline{AB} = 4$ ，則 \overline{OA} 之值為何？【1】

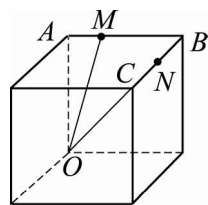
2. 如下圖，正方形 $ABCD$ 的邊長為6，而 P, Q 各為 $\overline{BC}, \overline{CD}$ 的中點，

今將此正方形沿虛線向上摺起，使 B, C, D 三點重合，

令此重合點為 R ，則四面體 $A - PQR$ 之體積為何？【2】

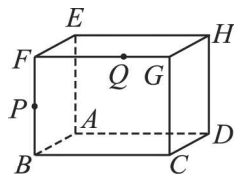


3. 附圖為一正立方體，若 M 在線段 \overline{AB} 上， $\overline{BM} = 2\overline{AM}$ ， N 為線段 \overline{BC} 之中點，則 $\cos \angle MON$ 之值為何？【3】
(分數要化成最簡分數)



4. 已知 $xyz \neq 0$ ，且 $(2x - y + 3z)^2 + (3x - y + z)^2 = 0$ ，則 $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x^3 + y^3 + z^3}$ 之值為何？【4】
5. 四面體 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = a$ ， $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DB} = 6$ ，若平面 ACD 與平面 BCD 所夾的兩面角為 60° ，則(1) a 之值為何？【5】 (2)直線 AB 與直線 CD 的最短距離之值為何？【6】
6. 空間中兩平面 $E_1 : x - 2y + 3z = 1$ ， $E_2 : 3x - y + 2z + 2 = 0$ ，則此兩平面的銳角平分面方程式為何？【7】

7. 如圖， $ABCD - EFGH$ 為稜(邊)長6的正立方體，將 A 點置於空間坐標系的原點， AB 邊置於 x 軸正向上， AD 邊置於 y 軸正向上， AE 邊置於 z 軸正向上，已知 P 點， Q 點分別在 BF 邊及 FG 邊上且 $\overline{PB} = \overline{PF}$ ， $2\overline{QG} = \overline{QF}$ ，若有一平面 T 截過 P 點與 Q 點，且將正立方體體積平分，則平面 T 方程式為何？【8】



8. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{AC} = 6$ ， P 為 $\triangle ABC$ 內部之一點，設 P 到 \overline{AB} ， \overline{BC} ， \overline{AC} 之距離分別為 x ， y ， z ，則 $x^2 + 4y^2 + 9z^2$ 之最小值為何？【9】
9. $O - xyz$ 空間中，兩點 $A(1, -2, -1)$ ， $B(3, 1, 0)$ ，平面 $E : x - y - z - 1 = 0$ ，則
- (1) \overline{AB} 在 E 上之正射影的長度為何？【10】
- (2)若 E 上一點 P 使 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 為最小，則 P 點之坐標為何？【11】

四、計算證明題：9%(每小題 3%)

1. 設空間中有一平面 E ，交三坐標軸於 A, B, C 三點，且 $A(a, 0, 0)$ ，

$B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ ，又原點 O 至平面 E 的距離為 h ，試證明：

$$(1) \triangle ABC \text{ 的面積 } \triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} .$$

$$(2) (\triangle ABC)^2 = (\triangle OAB)^2 + (\triangle OBC)^2 + (\triangle OCA)^2 .$$

$$(3) \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$