

105 學年度第二學期第二次定期考高三數甲試題

一、多選題 (2 題，每題 8 分，共計 16 分)

1. 下列哪些函數在 $x=0$ 處可微分？($[x]$ 為高斯函數，表示不大於 x 的最大整數。)

(1) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

(2) $f(x) = |x|$

(3) $f(x) = x|x|$

(4) $f(x) = |x-1|$

(5) $f(x) = [x]$

2. 已知函數 $f(x) = -x^3 + ax^2 - 4x + b$ 在 $x=2$ 處有極大值 3。請選出正確的選項。

(1) $a+b=7$

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 處有極小值，則 $\alpha < \frac{1}{2}$

(3) $f(x)$ 在區間 $[-1, 0]$ 為遞減函數

(4) $(1, f(1))$ 為 $f(x)$ 圖形的一個反曲點

(5) 若 $x \geq 3$ ，則 $f(x) \leq 0$

二、填充題 (11 格，每格 6 分，共計 66 分)

1. 若 $f(x) = (2x-1)^{10}$ ，則 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}} (1) \hspace{2cm}$ 。

2. 若 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-5)(x-6)}$ ，則 $f'(3) = \underline{\hspace{2cm}} (2) \hspace{2cm}$ 。

3. 設函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 2 \\ ax+b & , x > 2 \end{cases}$ ，若 $f(x)$ 在 $x=2$ 處可微分，

則實數數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}} (3) \hspace{2cm}$ 。

4. 若對任意實數 x ， $f(x) = -x^4 + \frac{4}{3}x^3 + a$ 之值恆負，則實數 a 值的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}} (4) \hspace{2cm}$ 。

5. 若三次函數 $y = 2x^3 + 3x^2 - 11x$ 的圖形與直線 $y = x+k$ 有三相異交點，則 k 值的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}} (5) \hspace{2cm}$ 。

6. 於計算 $f(x) = 2x^3$ 的圖形與直線 $x = 0, x = 1$ 及 x 軸所圍成之區域的面積為 r 時，若將閉區間 $[0, 1]$ 分成 n 等分後，設其上和為 U_n ，下和為 L_n ，若

$$U_n - L_n < \frac{1}{500}, \text{ 則正整數 } n \text{ 的最小值為 } \underline{\underline{(6)}} \text{。}$$

7. 定積分 $\int_0^3 |x^2 - x| dx$ 的值為 $\underline{\underline{(7)}}$ 。

8. 設 $y = x^4$ 與 $y = x^3$ 所圍成的封閉區域為 R ，將 R 繞 x 軸旋轉所得旋轉體的體積為 $\underline{\underline{(8)}}$ 。

9. $y = \frac{x^2}{8}$ 與 $y = x$ 及半平面 $y \leq 2$ 在第一象限所圍成的封閉區域面積為 $\underline{\underline{(9)}}$ 。

10. 設多項式函數 $f(x)$ 滿足 $f(0) = 1$ ， $\int_0^x f(t) dt = xf(x) + x^2 + x^3$ ，

$$\text{則 } f(x) = \underline{\underline{(10)}} \text{。}$$

11. 設二次函數 $f(x)$ 滿足 $\int_{-1}^1 xf(x) dx = \frac{4}{3}$ ，則 $f'(0) = \underline{\underline{(11)}}$ 。

**三、計算題(2 大題，每題 9 分，各小題配分列於題後，共計 18 分。
沒有計算過程不予計分。)**

1. 求過點 $P(2, 0)$ 且與曲線 $f(x) = x^3 - 4x$ 相切的直線方程式。(9 分)

2. (1) 設 a 為正實數，利用定積分與面積的關係，求 $\int_{-a}^a (\sqrt{a^2 - x^2}) dx$ 的值。

(3 分)

- (2) 求圓： $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ (其中 $b > a > 0$)，繞 x 軸旋轉之後所形成的旋轉體體積。(6 分)