

# 105 學年度第二學期第一次定期考高三數乙試題

## 一、多選題(共 4 題, 合計 40 分)

每題至少有一個選項正確, 所有選項均答對得 10 分; 只答錯 1 個選項得 6 分; 只答錯 2 個選項得 2 分; 答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答以零分計算。

1. 設  $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 、 $\langle c_n \rangle$  為三個無窮數列, 下列敘述哪些恆正確?

(A) 若  $\langle a_n \times b_n \rangle$ 、 $\langle a_n \rangle$  均為收斂數列, 則  $\langle b_n \rangle$  必為收斂數列

(B) 若  $\langle a_n + b_n \rangle$ 、 $\langle a_n - b_n \rangle$  均為收斂數列, 則  $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$  均為收斂數列

(C) 對所有自然數  $n$ , 若恆有  $a_n \leq b_n \leq c_n$ , 且  $\langle a_n \rangle$  及  $\langle c_n \rangle$  均是收斂數列, 則  $\langle b_n \rangle$  是收斂數列

(D) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ , 且對所有自然數  $n$ , 均有  $a_n < b_n$ , 則  $\alpha < \beta$

(E) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是收斂級數, 則  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

2. 下列哪些數列會收斂到 0? (A)  $\langle (-1)^n \rangle$  (B)  $\langle \left(-\frac{\pi}{4}\right)^n \rangle$  (C)  $\langle \frac{1}{n} \rangle$

(D)  $\langle \frac{n}{2n+3} \rangle$  (E)  $\langle \frac{4^n + 3^n}{5^n + 4^n} \rangle$

3. 下列哪些無窮級數收斂? (A)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$  (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$  (C)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  (E)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

4. 設  $a, b, c$  為正整數,  $1 < a < b < c < 9$ , 若  $0.\bar{a}$ ,  $0.0\bar{b}$ ,  $0.00\bar{c}$ , ..... 為無窮等比數列, 則下列哪些正確?

(A)  $2b = a + c$  (B)  $b = 4$  (C) 公比 =  $\frac{2}{5}$  (D) 此數列第四項為  $0.001\bar{7}$

(E) 此無窮等比級數的總和 =  $\frac{7}{18}$ 。

## 二、填充題(共 8 題, 每題 6 分, 共 48 分)

1. 設  $a, b$  為實數, 且滿足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + 6}{3n - 2} = 5$ , 則  $a + b =$  \_\_\_\_\_。
2. 若  $\langle a_n \rangle$  為一收斂數列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n - 2}{5a_n + 3} = \frac{1}{2}$ , 則  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  的值 = \_\_\_\_\_。
3. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n(n+1)})$  的值 = \_\_\_\_\_。
4. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right)$  的值 = \_\_\_\_\_。
5. 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n}$  的值 = \_\_\_\_\_。
6. 設  $x$  為實數, 若無窮數列  $\left\langle \left( \frac{3x}{2x+1} \right)^n \right\rangle$  收斂, 求  $x$  之範圍為 \_\_\_\_\_。
7. 若  $0.\overline{5}$  與  $0.\overbrace{5 \dots 5}^n$  的差小於  $10^{-7}$ , 則正整數  $n$  的最小值 = \_\_\_\_\_。
8. 設甲、乙兩人輪流投擲 2 枚公正骰子, 約定先投擲出點數和是 9 者獲勝, 今由甲先投擲, 則甲獲勝的機率為 \_\_\_\_\_。

## 三、計算證明題(合計 12 分)

1. 已知兩數列  $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ , 其中  $a_n = 2^n$ ,  $b_n = n^2$ 
  - (1) 猜測從  $n = ?$  時開始滿足  $a_n \geq b_n$  (3分)
  - (2) 請用數學歸納法證明(1)的猜測是正確的。(6分)
  - (3) 請用夾擠定理求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$  的值。(3分)