105 學年度第二學期第一次定期考高一數學試題

一、多重選擇題(每題 6 分，錯一選項扣 2 分，扣分扣至該題 0 分為止，共計 24 分)

1. 下列選項何者正確？

(1) $\sum_{k=1}^{n} n = n^2$　　(2) $\sum_{k=2}^{10} k^3 = \sum_{k=1}^{9}(k+1)^3$

(3) $\sum_{k=1}^{5}(3k+2) = \sum_{k=1}^{5}(20-3k)$　　(4) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}(k+1)\right]$

(5) $\sum_{k=1}^{n}(3a_k+2b_k) = 3\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)+2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$

2. 設U為宇集，A, B, C為三個集合，則下列敘述何者為真？

(1) 若$(A\cap C)\subset(B\cap C)$，則$A\subset B$　　(2) 若$A\subset B$，則$n(A)<n(B)$

(3) 若$A\subset B$，則$A'\cup B=U$　　(4) 若$A-B=\varnothing$，則$A\subset B$

(5) $n(A-B)=n(A)-n(B)$

3. 已知$\langle a_k\rangle$為一首項$a_1>0$的等差數列，若其前n項和$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$滿足$S_9=S_{10}$，則下列敘述何者正確？

(1) 數列$\langle a_k\rangle$之公差$d<0$　　(2) $a_8+a_{11}<0$

(3) $S_{20}=0$　　(4) $S_5>S_{13}$

(5) $S_n=S_{19-n}$，$1\le n\le 9$

4. 以$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$表示數列$\langle a_k\rangle$之前n項和，則下列敘述何者正確？

(1) 若$a_1=3$，$a_2=9$，$a_3=27$，則$\langle a_k\rangle$為等比數列

(2) 若等比數列$\langle a_k\rangle$之公比為r，則$S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

(3) 若$\langle a_k\rangle$為等比數列，則S_n, S_{2n}, S_{3n}亦為等比數列

(4) 若$\langle a_k\rangle$為等差數列，則$a_n+a_{18-n}=a_{6-m}+a_{12+m}$

(5) 若$S_n=2n^2+1$，則$\langle a_k\rangle$為等差數列

二、填充題(每題 6 分，共計 42 分)

1. 已知a, b, c三數成等比數列，其和為 7。若將此三數依序加上$2, 12, -3$後，則形成一公差不為 0 的等差數列。由以上條件可推知數對$(a, b, c)=$ ____ 。

2. 計算 $(-1)\times 1\times 2+0\times 2\times 3+1\times 3\times 4+\cdots+(k-2)k(k+1)+\cdots+8\times 10\times 11$ 之值= __________ 。

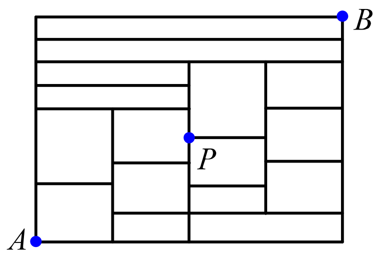
3. 已知$\langle a_k \rangle$為首項$a_1=1$、公差$d>0$的等差數列，若$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{13}a_{14}}$為整數，則公差$d$最小的可能值為 _______ 。

4. 定義集合A的冪集合$2^A=\{X \mid X\subset A\}$。若$A=\{1, \varnothing\}$，則以列舉法表示$2^A=$ ____________________ 。

5. 已知集合$A=\{3a-13, a^2-2a+2\}$，$B=\{a-2b, -4, a+2b^2\}$滿足 $n(A-B)=n(A)-n(B)$，則數對$(a,b)=$ __________ 。

6. 某地區的街道縱橫交錯如下圖所示，若規定在其間只能依 “→”、“↑”、“↓” 三個方向移動，且同一地點不許經過兩次，則由 A 至 B 不經過 P 的走法有 __________ 種。

7. 某班舉行數學測驗，試卷共有A, B, C三題。統計後得知：(1)至少答對一題的同學有 34 位；(2)答對A題的同學有 24 位、答對B題的同學有 14 位、答對C題的同學有 19 位；(3)全班有$\frac{1}{4}$的同學同時答對A, B二題、有$\frac{1}{6}$的同學同時答對B, C二題、有$\frac{1}{3}$的同學同時答對A, C二題。根據以上資訊可推得〝恰〞答對二題的同學共有 __________ 位。



三、計算題（各題配分列於題後，全部 3 大題，共計 34 分）

1. 設數列$\langle a_n \rangle$滿足遞迴關係式 $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_n = 2a_{n-1} - 3, n \ge 2 \end{cases}$

(1)將$a_n = 2a_{n-1} - 3$整理為 $(a_n + k) = 2(a_{n-1} + k)$ 的形式，試求k之值。(2 分)

(2)承(1)，令數列$\langle b_n \rangle = \langle a_n + k \rangle$，試求$b_n$之一般式(以$n$表示的式子)。(2 分)

(3)利用(2)求數列$\langle a_n \rangle$之前 11 項和$S_{11} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{11}$之值。 (7 分)

2. 已知數列$\langle a_n \rangle$滿足遞迴關係式 $\begin{cases} a_1 = \dfrac{2}{7} \\ a_n = \dfrac{9a_{n-1} - 1}{4a_{n-1} + 13}, n \ge 2 \end{cases}$

(1) 試計算a_2, a_3, a_4之值。 (3 分)

(2) 請根據(1)猜測a_n之一般式（歸納結果正確才給分）。 (2 分)

(3) 利用數學歸納法證明您在(2)中的猜測是正確的。 (8 分)

3. 在量子商店中買東西時，商家只接受與商品售價相等的付款方式，例如售價 7 元的商品，我們可以用 7 個 1 元硬幣、或是 1 個 5 元加上 2 個 1 元硬幣購買。今日小建帶著總額不到 100 元的硬幣若干個（新臺幣硬幣幣額共有 50 元、10 元、5 元、1 元 4 種）到此商店消費，已知小建原本可以支付的款額（在前例中：$7 = 1\times 7 = 5\times 1 + 1\times 2$ 為同一種款額）僅有 18 種，但若他將 1 個 10 元硬幣與他人交換為 2 個 5 元硬幣，則可支付的款額會增加為 30 種；若他再將換來的其中 1 個 5 元硬幣與他人交換為 5 個 1 元硬幣，則可支付的款額會大於 30 種（因商店有免費來店禮，故 0 元亦算是一種款額）。試問：

(1) 小建〝原本〞攜帶的 5 元硬幣有幾個？ (2 分)

(2) 小建攜帶的硬幣總共多少元？ (8 分)