105 學年度第一學期第二次定期考高一數學試題

一、多選題(佔 32 分）

說明：每題至少有一個選項是正確。每題全部答對得 8 分，只錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上或均未作答者不給分。

1. 設 $z=\frac{3}{5}i+\frac{4}{5}$，已知 $f(x)$ 為三次實係數多項式且滿足 $f(z)=0$。請選出正確的選項。

   (1) $f(\frac{1}{z})=0$　(2) $f(\frac{3}{5}i-\frac{4}{5})\neq 0$　(3) 方程式 $f(x)=0$ 恰有一個正根

   (4) 方程式 $f(x)=0$ 恰有兩個虛根

   (5) 方程式 $f(x^3)-x^6=0$ 至少有一個實根

2. 設多項式 $f(x)=3x^4-22x^3+x^2+5x-1$，已知方程式 $f(x)=0$ 至少有一個有理根。請選出正確的選項。

   (1) 方程式 $f(x)=0$ 在 0 與 1 之間恰有一個有理根

   (2) 方程式 $f(x)=0$ 在 0 與 1 之間至少有一個無理根

   (3) 方程式 $f(x)=0$ 恰有一個負根

   (4) 函數 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸恰交於兩點

   (5) 方程式 $f(x)=0$ 有大於 8 的實根

3. 假設 $a,\ b,\ c$ 為三個複數。請選出正確的選項。

   (1) 若 $a\geq b$，則 $a+c\geq b+c$

   (2) 若 ab 為實數，則 $a=\overline{b}$（即 $a,\ b$ 互為共軛複數）

   (3) 若 $a^2\geq b^2$，則 $a^2-b^2\geq 0$

   (4) 若 $a^2+b^2i=0$，則 $a=b=0$

(5) 若$ac<bc$且$c<0$，則$a>b$

4. 請選出正確的選項。

(1) 實係數奇次方程式至少有一個實根。

(2) 複數係數奇次方程式至少有一個虛根。

(3) 實係數n次多項式函數圖形與x軸至少有一交點。

(4) 設$f(x),\ g(x)$為實係數多項式，已知$\deg f(x)=m,\ \deg g(x)=n$且$m\geq n$，則兩函數圖形$y=f(x),\ y=g(x)$ 至多有m個相異交點。

(5) 若$f(x)$為實係數三次多項式且$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \omega$為相異正數，則一定存在實數$a,\ b,\ c,\ d$使得$f(x)=a(x-\beta)(x-\gamma)(x-\omega)+b(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\omega)$
$+c(x-\alpha)(x-\beta)(x-\omega)+d(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$。

二、填充題(佔 46 分）

說明：(1)答案全對才給分 (2)「答對題數」與得分對照表如下:

答對	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
得分	5	10	15	20	24	28	32	36	40	43	46

1. 設三次多項式$f(x)$除以$x-1,\ x-2,\ x-3,\ x-4$的餘式分別為$0,\ 0,\ 1,\ 2$，則$f(x)$除以$x-7$的餘式為____________。

2. 給定兩實數$a,\ b$且滿足$\dfrac{2+3i}{a+bi}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，則數對$(a,\ b)=$________ 。

3. 已知二次函數$f(x)=kx^2+(2k+1)x+(2k+1)$圖形恆在x軸上方(無交點)，求實數k的範圍為_________。

4. 方程式$4^{x+1}-65\times 2^x+16=0$的解為_______________。

5. 計算$(\dfrac{16}{25})^{-0.5}\times(\dfrac{81}{16})^{\frac{3}{4}}\times(0.25)^{-2.5}-(\sqrt{11}+\sqrt{5})^2(\sqrt{11}-\sqrt{5})^2+2016^0$的值為____。

6. 設多項式$f(x)=2x^3-7x^2-5x+15$，已知$f(x)=0$的三根為α,β,γ，且

$-4 \le \alpha < \beta < \gamma \le 4$，及 $a \le \alpha < a+1,\ b \le \beta < b+1,\ c \le \gamma < c+1$，其中 $a,\ b,\ c$ 為整數，則實數序組 $(a,\ b,\ c) =$ ＿＿＿＿＿ 。

7. 實係數方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 有四根為 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \omega$，其中 $\alpha + \beta = 3 - 2i,\ \gamma\omega = 4 + 3i$，則 $a + b + c + d =$ ＿＿＿＿＿ 。

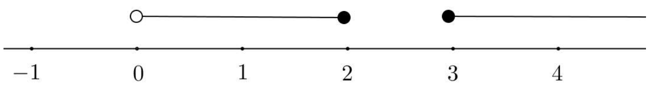
8. 設 $\deg f(x) \ge 3$，若多項式 $f(x)$ 除以 $(x-b)(x-c),\ (x-c)(x-a),\ (x-a)(x-b)$ 的餘式分別為 $2x+1,\ 3x-4,\ x+2$，且 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 的餘式為 $r(x)$，則 $r(8) =$ ＿＿＿ 。

9. 設 $a,\ b$ 為實數，已知 $x^2 - x - 1$ 整除 $ax^{17} + bx^{16} + 3$，則 $a =$ ＿＿＿ 。

10. 設 $f(x) = x^2 - 6x + 8$，則不等式 $f(|x|) \ge |f(x)|$ 的解為＿＿＿＿＿＿＿。

11. 不等式 $\dfrac{(x-1)^4(x-3)^5(x-4)}{(x-2)^3(x-5)^2} \ge 0$ 的解為＿＿＿＿。(註:答案以圖示表示，且端點請以實心、空心點明顯表示)

例如:



表示 $0 < x \le 2$ or $x \ge 3$

三、計算題(佔 22 分)說明:未寫計算過程不計分。

1. 已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(-1) = -12$ 、 $f(0) = -7$ 、 $f(1) = -6$ 、 $f(2) = 3$，試求

(1)若 $f(x) = a(x+1)(x-1)x + b(x+1)(x-1) + c(x+1) + d$，求實數序組 $(a,\ b,\ c,\ d)$。 (4 分)

(2)若 $f(x)=j(x-1)^3+k(x-1)^2+l(x-1)+m$，求實數序組 $(j,\ k,\ l,\ m)$。 (4 分)

(3)若 $f(x)=p(x-5)(x+1)(x-1)+q(x-2)(x+3)+r(x-4)+s$ ，求實數序組

$(p,\ q,\ r,\ s)$ 。(4 分)

2.設 $f(x)=2x^4-3x^3+2x^2+x-6$ ，試求

(1) 寫出方程式 $f(x)=0$ 的所有根。(5 分)

(2) 解不等式 $\dfrac{1}{2x^4-3x^3+2x^2+x-6}\leq 0$ 。(5 分)