

104 學年度第二學期第二次定期考高二數學試題(自)

本試題有三大題，請將答案寫於答案卷

一、多重選擇題(每題 5 分，共 25 分)

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項者所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1、已知坐標空間中三點 $A(0,1,2)$ ， $B(1,1,1)$ ， $C(2,-1,2)$ ， $D(3,2,1)$ 下列敘述哪些正確？

(1)由 A, B, C 所決定的平面方程式為 $E: x + y + z = 3$

(2) $\triangle ABC$ 的面積為 $2\sqrt{3}$

(3)由 A, B, C 所決定的平面 E 與 xz 平面之銳夾角小於 45°

(4)由點 D 到 A, B, C 所決定的平面之距離為 $\sqrt{3}$

(5)四面體 $D - ABC$ 的體積為 2。

2、空間中， $L_1: \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$ ， $L_2: \begin{cases} x=2 \\ z=6 \end{cases}$ ，則下列有關 L_1 ， L_2 敘述哪些選項是正確的？

(1)直線 L_1 與 xy 平面垂直

(2)直線 L_2 與 xy 平面平行

(3)直線 L_1 與直線 L_2 交於一點

(4)直線 L_2 與 y 軸互為歪斜線

(5)直線 L_2 在平面 $z = 6$ 上。

3、設 a, b 為實數，下列有關線性方程組
$$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ x+3y-2z=1 \\ x+(a+2)y+(b-2)z=-3 \end{cases}$$
 的敘述哪些是

正確的？

- (1)若此線性方程組有解，則必定恰有一組解
 (2)若此線性方程組恰有一解，則 $a-b=1$
 (3)存在恰一組數對 (a,b) 使得此線性方程組有無限多解
 (4)存在不只一組數對 (a,b) 使得此線性方程組無解
 (5)若此線性方程組有無限多解，則 $a^2+b^2=12$ 。

4、下列哪一個矩陣經過列運算後可化成
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
？

- (1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$
 (4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 。

5、設 A, B, C 均為二階方陣， I 為二階單位方陣， O 為二階零矩陣，則下列各式何者恆成立？

- (1) $A(BC) = (AB)C$ (2) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
 (3) $A^3 - I = (A-I)(A^2 + A + I)$ (4)若 $AB = O$ 且 $A \neq O$ ，則 $B = O$
 (5) $(AB)^T = A^T B^T$ 。

二、填充題(每題 6 分，共 54 分)

1、設實數 x, y, z 滿足 $x+2y+2z-4=0$ ，則 $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2}$ 的最小值為何？答：_____ (1) _____。

2、空間中有平面 $E: x+2y+z-3=0$ 與兩點 $A(-2, 4, 1)$ 及 $B(1, 1, -1)$ ，若線段 \overline{AB} 與交於平面 E 交於 P 點，試求 $\overline{PA}:\overline{PB}$ 之比值。答：_____ (2) _____。

3、空間中有兩平面 $E_1: 2x+y-z+3=0$ 與 $E_2: x+2y+z+2=0$ ，求過點 $(2, 3, 1)$ 且與兩平面 E_1 與 E_2 都垂直的平面方程式為何？答：_____ (3) _____。

4、平面 E 包含平面 $2x+2y-z+3=0$ 與平面 $x+2y+z+2=0$ 的交線，且垂直於平面 $2x+y+z+7=0$ ，則平面 E 的方程式為何？答：_____ (4) _____。

5、實數 x, y, z 滿足方程組 $\begin{cases} x+y-3z=5 \\ x-y+z=3 \end{cases}$ ，則 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值為何？

答：_____ (5) _____。

6、在電路網中並聯的兩個電阻器，其電阻的計算公式為 $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ，其中 R_1, R_2 是原來電阻器的電阻，而 R 是並聯後的電阻，給定 A, B, C 三個電阻器，並聯 A, B 得到的電阻是 24 歐姆 (ohm)，又並聯 B, C 得到的電阻是 40 歐姆，並聯 A, C 得到的電阻是 30 歐姆，則 A 的電阻為何？答：_____ (6) _____ 歐姆。

7、若方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 有唯一解 $x=3, y=4, z=3$ ，則方程組

$\begin{cases} d_1x+2b_1y+c_1z=3a_1 \\ d_2x+2b_2y+c_2z=3a_2 \\ d_3x+2b_3y+c_3z=3a_3 \end{cases}$ 的解 (x, y, z) 為何？答：_____ (7) _____。

8、若 a 為實數，代表方程組的增廣矩陣為 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & a+1 \\ 1 & 3 & -3 & 1+a \\ 1 & -1 & 2 & 1-a \end{bmatrix}$ 有解，則 a 之值為何？答：_____ (8) _____。

9、設 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1]$ ，若 $(I + \frac{1}{3}A)^5 = aI + bA$ ，其中 a, b 皆為實數，

則 $a + b$ 之值為何？答：_____ (9) _____。

三、計算題(共 21 分)

1、空間中，兩點 $A(1, 4, -1)$ 與 $B(10, 1, 11)$ ，直線 $L: \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z}{1}$ ，若點 A 在

直線 L 上的投影點為 A' ，點 B 在直線 L 上的投影點為 B' ，點 P 在直線 L 上，

試求下列問題：

(1) A' 坐標；(3 分)

(2) B' 坐標；(3 分)

(3) $\overline{PA} + \overline{PB}$ 之最小值(提示： A, B, L 不共平面)；(3 分)

(4) 承(3)，此時 P 點坐標。(3 分)

2、設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ， $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，化簡下列各式：

(1) $A^2 - 5A$ ；(3 分)

(2) $x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 2x - 1$ 除以 $x^2 - 5x - 2$ 的餘式；(3 分)

(3) $A^4 - 4A^3 - 6A^2 - 2A - I_2$ 。(3 分)