

104 學年度第二學期第二次定期考高二數學試題(社)

本試題有三大題，請將答案寫於答案卷

一、多重選擇題(每題 5 分，共 25 分)

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項者所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1、在空間坐標系中，下列敘述何者為真？

- (1) xy 平面的方程式為 $xy = 0$
- (2) yz 平面的方程式為 $x = 0$
- (3) zx 平面的方程式為 $y + z = 0$
- (4) $z = 0$ 表一平面
- (5) 通過 $A(1, 2, 3)$ 且垂直 x 軸的平面方程式為 $x = 1$ 。

2、空間中， $L_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$ ， $L_2: \begin{cases} x = 2 \\ z = 6 \end{cases}$ ，則下列有關 L_1 ， L_2 敘述哪些選項是正確的？

- (1) 直線 L_1 與 xy 平面垂直
- (2) 直線 L_2 與 xy 平面平行
- (3) 直線 L_1 與直線 L_2 交於一點
- (4) 直線 L_2 與 y 軸互為歪斜線
- (5) 直線 L_2 在平面 $z = 6$ 上。

3、設 a, b 為實數，下列有關線性方程組
$$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ x+3y-2z=1 \\ x+(a+2)y+(b-2)z=-3 \end{cases}$$
 的敘述哪些是

正確的？

- (1)若此線性方程組有解，則必定恰有一組解
 (2)若此線性方程組恰有一解，則 $a-b=1$
 (3)存在恰一組數對 (a,b) 使得此線性方程組有無限多解
 (4)存在不只一組數對 (a,b) 使得此線性方程組無解
 (5)若此線性方程組有無限多解，則 $a^2+b^2=12$ 。

4、下列哪一個矩陣經過列運算後可化成
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
？

- (1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$
 (4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 。

5、設 A, B, C 均為二階方陣， I 為二階單位方陣， O 為二階零矩陣，則下列各式何者恆成立？

- (1) $A(BC) = (AB)C$ (2) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
 (3) $A^3 - I = (A-I)(A^2 + A + I)$ (4)若 $AB = O$ 且 $A \neq O$ ，則 $B = O$
 (5) $(AB)^T = A^T B^T$ 。

二、填充題(每題 6 分，共 54 分)

1、設實數 x, y, z 滿足 $x+2y+2z-4=0$ ，則 $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2}$ 的最小值為何？答：_____ (1) _____。

2、空間中有平面 $E: x+2y+z-3=0$ 與兩點 $A(-2, 4, 1)$ 及 $B(1, 1, -1)$ ，若線段 \overline{AB} 與交於平面 E 交於 P 點，試求 $\overline{PA}:\overline{PB}$ 之比值。答：_____ (2) _____。

3、空間中有兩平面 $E_1: 2x+y-z+3=0$ 與 $E_2: x+2y+z+2=0$ ，求過點 $(2, 3, 1)$ 且與兩平面 E_1 與 E_2 都垂直的平面方程式為何？答：_____ (3) _____。

4、平面 E 包含平面 $2x+2y-z+3=0$ 與平面 $x+2y+z+2=0$ 的交線，且垂直於平面 $2x+y+z+7=0$ ，則平面 E 的方程式為何？答：_____ (4) _____。

5、實數 x, y, z 滿足方程組 $\begin{cases} x+y-3z=5 \\ x-y+z=3 \end{cases}$ ，則 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值為何？

答：_____ (5) _____。

6、《九章算術》是現存最早（東漢時期）的中國數學著作之一，此書收錄 246 個數學問題，並分為九大類，故稱「九章」，有許多以生活為情境的應用問題。當中「方程章」第八題，是以當時農家有關以物易物之商業行為的問題「今有賣牛二、羊五，以買一十三豬，有餘錢一千；賣牛三、豬三，以買九羊，錢適足；賣六羊、八豬，以買五牛，錢不足六百。問牛、羊、豬價各幾何？」依此題意，一頭豬的價格為何？答：_____ (6) _____ 錢。

7、若方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 有唯一解 $x=3$ ， $y=4$ ， $z=3$ ，則方程組

$$\begin{cases} d_1x + 2b_1y + c_1z = 3a_1 \\ d_2x + 2b_2y + c_2z = 3a_2 \\ d_3x + 2b_3y + c_3z = 3a_3 \end{cases} \text{的解}(x, y, z) \text{為何? 答: } \underline{\hspace{2cm}} \text{(7)} \text{。}$$

8、若 a 為實數，代表方程組的增廣矩陣為 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & a+1 \\ 1 & 3 & -3 & 1+a \\ 1 & -1 & 2 & 1-a \end{bmatrix}$ 有解，則 a 之值為何？答： $\underline{\hspace{2cm}}$ (8) 。

9、設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{20} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ，則 $a+b+c+d$ 之值為何？答： $\underline{\hspace{2cm}}$ (9) 。

三、計算題(共 21 分)

1、在空間坐標中，兩點 $A(2,3,1)$ 與 $B(1,0,1)$ ，點 P 為平面 $E: x+y+z=0$ 上的動點，試求

(1) A 關於平面 E 之對稱點 A' ；(3 分)

(2) \overline{AB} 在平面 E 正射影長；(3 分)

(3) $\overline{AP} + \overline{BP}$ 之最小值；(3 分)

(4) $|\overline{AP} - \overline{BP}|$ 之最大值。(3 分)

2、設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ， $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，化簡下列各式：

(1) $A^2 - 5A$ ；(3 分)

(2) $x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 2x - 1$ 除以 $x^2 - 5x - 2$ 的餘式；(3 分)

(3) $A^4 - 4A^3 - 6A^2 - 2A - I_2$ 。(3 分)