

104 學年度第二學期第三次定期考高二數學試題(社)

一、 單選題：(10%，每題 5 分)

1. 坐標平面上，方程式 $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}}$ 所代表的圖形名稱為
(A) 一圓 (B) 一拋物線 (C) 一橢圓 (D) 一雙曲線 (E) 一直線。
2. 在坐標平面上有 $A(5, 0)$ 、 $B(-5, 0)$ 兩點，則下列何者正確？
(A) 若動點 P 滿足 $\overline{AP} + \overline{BP} = 10$ ，則 P 的軌跡為一橢圓。
(B) 若動點 P 滿足 $\overline{AP} + \overline{BP} = 12$ ，則 P 的軌跡為一線段。
(C) 若動點 P 滿足 $|\overline{AP} - \overline{BP}| = 8$ ，則 P 的軌跡為雙曲線。
(D) 若動點 P 滿足 $|\overline{AP} - \overline{BP}| = 10$ ，則 P 的軌跡為一射線。
(E) 若動點 P 滿足 $\overline{AP} - \overline{BP} = 0$ ，則 P 的軌跡為一點。

二、 多選題：(40%，每題至少有一個選項正確，全部答對者，得 8 分；

答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；所有選項未作答或答錯多於 2 個選項者，得 0 分。)

1. 已知 $M = \begin{bmatrix} a-3 & -1 \\ -2 & a-2 \end{bmatrix}$ ，若 M 沒有乘法反方陣 (M^{-1} 不存在)，則下列選項中那些是 a 可能的值？
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) -1。
2. 設 A 、 B 為兩個二階方陣，且 $AB = O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，則下列敘述何者正確？
(A) 若 $A \neq O$ ，則 B 無乘法反方陣。
(B) 若 $B = O$ ，則 A 有乘法反方陣。
(C) 若 $A = O$ ，則 B 無乘法反方陣。

- (D) 若 $A \neq O, B \neq O$, 則兩方陣 A, B 皆無乘法反方陣。
- (E) 若 $A = O, B = O$, 則兩方陣 A, B 均有乘法反方陣。
3. 拋物線 Γ 的方程式為 $y^2 - 8x + 4y + 28 = 0$, 則下列哪些選項是正確的?
- (A) Γ 的頂點為 $(3, -2)$
- (B) Γ 的焦點為 $(1, -2)$
- (C) Γ 的準線為 $x = 5$
- (D) Γ 的對稱軸方程式為 $y = -2$
- (E) Γ 的頂點與正焦弦兩端點所成三角形面積為 8。
4. 設 a, b 為實數, 關於二元二次方程式: $ax^2 + y^2 - 4x - 2by = 0$ 的圖形 Γ , 下列哪些選項是正確的?
- (A) 若 $a = 0$, 則 Γ 為一拋物線。
- (B) 若 $b = 0$, 則 Γ 為一橢圓。
- (C) 若 Γ 為一圓, 則 $a = 1$ 。
- (D) 若 Γ 為一橢圓, 則 $a < 0$ 。
- (E) 若 Γ 為一雙曲線, 則 $a > 0$ 。
5. 橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, 兩焦點為 F_1, F_2 , 點 P 為橢圓上的動點, 但 P 不在 y 軸上。
- 試問下列哪些選項是正確的?
- (A) 恰有四個相異點, 可使 ΔPF_1F_2 為等腰三角形。
- (B) ΔPF_1F_2 都是銳角三角形。
- (C) 若平面上另有一點 Q 落在橢圓 Γ 外部, 則 ΔQF_1F_2 的周長大於 $8 + 2\sqrt{7}$ 。

(D) ΔPF_1F_2 的周長值是變動的並不唯一。

(E) ΔPF_1F_2 的面積最大值是 $3\sqrt{7}$ 。

三、填充題：(30%，每題 6 分)

1. 設方程式 $\frac{(x+1)^2}{1-t} + \frac{(y+1)^2}{3+t} = 1$ 表示長軸在直線 $y+1=0$ 上之橢圓，則 t 之範圍為 (A)。

2. 雙曲線 Γ 與橢圓 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 共焦點，且過 $(\sqrt{3}, 2)$ ，則 Γ 的方程式為 (B)。

3. 過 $A(3, 0)$ 的直線交拋物線 $y^2 = 12x$ 於 P, Q 兩點，已知 $\overline{PA} : \overline{AQ} = 3 : 1$ ，則 $\overline{PA} =$ (C)。

4. 坐標平面上，若雙曲線 Γ 經過點 $(10, 10)$ ，且其兩焦點為 $(10, -6)$ 、 $(-20, -6)$ ，則雙曲線 Γ 的漸近線方程式的斜率為 (D)。(二解)

5. 設 $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $AX = B$ ，試求 $X =$ (E)。

四、計算題：20%(請寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分)

1. 由統計資料知，某網路城市在晴天之後隔天為雨天的機率為 $\frac{1}{3}$ ，而在雨天之後也是雨天的機率為 $\frac{1}{2}$ ，已知開始觀察當天為晴天，假設 S_n 、 R_n 分別代表開始觀察日的第 n 天後晴天、雨天的機率。則：

- (1) 請寫出此情況的轉移矩陣 A 。(4%)
- (2) 第二天後晴天的機率 S_2 為何？(2%)
- (3) 長期下來若晴天、雨天能達到穩定狀態，令 S 、 R 各代表晴天、雨天達到穩定狀態的機率，求 S 、 R 為何？(4%)
2. 坐標平面上有一個圓心 $O(0, 0)$ ，半徑為10 的圓 C ，二定點 $A(6, 0)$ 與 $B(12, 0)$ ， Q 是圓 C 上的一動點，則：
- (1) 若 P 為 \overline{AQ} 的中垂線與直線 \overline{OQ} 的交點，當 Q 在圓 C 上移動時，求動點 P 的軌跡方程式。(5%)
- (2) 若 R 為 \overline{BQ} 的中垂線與直線 \overline{OQ} 的交點，當 Q 在圓 C 上移動時，求動點 R 的軌跡方程式。(5%)