104 學年度第二學期第一次定期考高三數乙試題

壹、是非題（一題 5 分，答對得 5 分，答錯或沒做答得 0 分）

若你認為題目敘述是正確的，請在答案卷中畫記O；若你認為題目敘述是錯誤的，請在答案卷中畫記×。

1.若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$ (其中α,β為實數)，則 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+2b_n)=3\alpha+2\beta$。

2.$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$為兩個無窮數列，若$\langle a_nb_n\rangle$為收斂數列，則.$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$均為收斂數列。

3. $\lim\limits_{n\to\infty} 0.\overbrace{99\cdots9}^{n個9}<1$

4.若數列$\langle a_n\rangle$為收斂數列，則數列$\langle a_n+(-1)^n\rangle$為發散數列。

5. $0.\overline{2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2}{10^k}$

6. 無窮級數 $3-3+3-3+\ldots+(-3)^{n-1}+\ldots=0$

貳、多重選擇題(每題全對給 7 分，只答錯一個選項得 5 分，只答錯二個選項得 2 分, 其餘得 0 分)

1. 下列關於數列極限的選項那些是正確的？

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[(\dfrac{-3}{4})^n+\dfrac{3n-2}{5n-4}]=\dfrac{3}{5}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+10000})=0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\pi}{3})^n=0$，π為圓周率

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}$

2. 下列關於無窮級數的選項那些是正確的？

(1) 無窮等比級數 $0.4+(0.4)^2+(0.4)^3+\ldots+(0.4)^n+\ldots=\dfrac{0.4}{1-0.4}$

(2) 無窮等比級數 $2.4+(2.4)^2+(2.4)^3+\ldots+(2.4)^n+\ldots=\dfrac{2.4}{1-2.4}$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty}[(0.3)^k+(1.5)^k]=\sum_{k=1}^{\infty}(0.3)^k+\sum_{k=1}^{\infty}(1.5)^k$

(4) 無窮級數 $10+10^2+\ldots+10^{10}+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{5})^k$ 收斂

(5) 無窮級數 $0.2+(0.2)^2+\ldots+(0.2)^{100}+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{5}{3})^k$ 收斂

參、填充題(一格 7 分)

1. 試求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-6n+3}{5n^2+6n-100}=$__________。

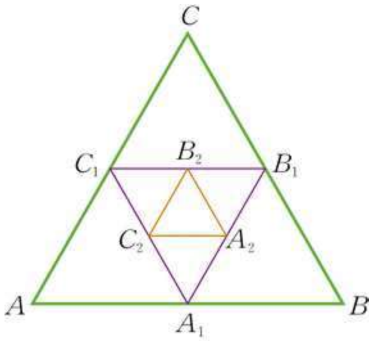
2. 多項式 $f(x)=(x^2+nx+5)^3$ 除以 $x-2$ 的餘式為 r_n，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r_n}{n^3}=$ __________。

3. 袋中有 3 個白球，2 個紅球，自袋中取一球觀察球的顏色後，再將球放入袋中，假設每個球被取中的機會相等，令 P_k 代表直到第 k 次取球才取得白球的機率，例如 $P_1=\dfrac{3}{5}$，$P_2=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}$，…試求 $\sum_{k=1}^{\infty}P_k=$__________。

4. 已知對於每一個正整數 n，數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $3n^2+1\le n^2a_n\le 3n^2+7n-5$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$__________。。

5. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$，且數列 $\langle a_n\rangle$ 與 $\langle b_n\rangle$ 滿足 $\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$，$n=1,2,\ldots$，且 $a_1=3$，$b_1=4$。試求 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=$______________。

6. 如右圖，設一正三角形 ABC 的邊長為 6，連接各邊中點 A_1，B_1，C_1 形成△$A_1B_1C_1$，再連接其三邊中點形成△$A_2B_2C_2$，依此規則繼續下去會產生無限多個三角形，設ΔABC 的面積為 K_1，$\Delta A_1B_1C_1$ 的面積為 K_2，…，$\Delta A_nB_nC_n$ 的面積為 K_{n+1}，…，



試求 $\sum_{n=1}^{\infty} K_n =$_________。

肆、計算證明題(14 分)

一、設無窮等比級數 $1+\frac{1}{5}+(\frac{1}{5})^2+\ldots.+(\frac{1}{5})^{n-1}+\ldots$的和為 S，其前 n 項之和為 S_n，

(1)試求前 n 項的和 S_n (4 分)

(2)試求 S (5 分)

(3)若$|S-S_n|<\frac{1}{40000}$，則 n 至少為多少？ (5 分)