

104 學年度第二學期第一次定期考高一數學試題

一、多重選擇題(每題 7 分，共 28 分)

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 7 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 3 分；答錯 3 個選項者，得 1 分；答錯多於 3 個選項或所有選項均未作答者，該題以 0 分計算。

1. 已知正整數 $n = 3600$ ，請選出正確的選項。

- (1) n 的正因數共有 45 個
- (2) n 的正因數中，奇數共有 4 個
- (3) n 的正因數中，是 9 的倍數但不是 8 的倍數者共有 9 個
- (4) n 的正因數中，不是完全平方數也不是完全立方數者共有 31 個
- (5) n 的正因數中，不是 60 的因數者共有 22 個

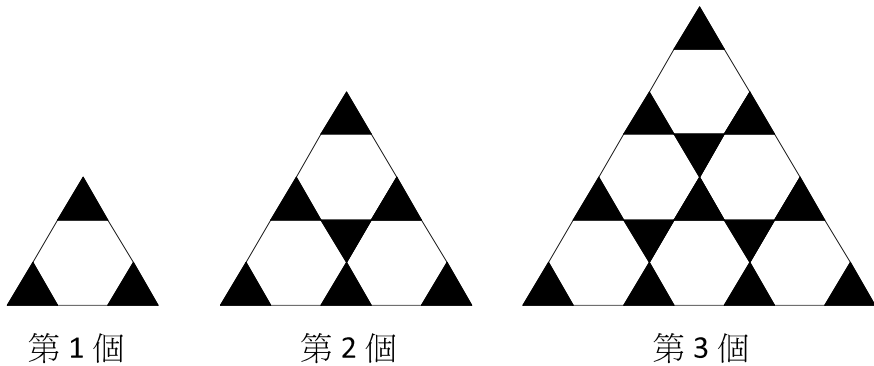
2. 設 A, B, C 表示三個集合，請選出正確的選項。

- (1) 若 $A \cup C = B \cup C$ ，則 $A = B$
- (2) 若 $A - B = B - A$ ，則 $A = B$
- (3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (4) $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$
- (5) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

3. 用白色的正六邊形與黑色的正三角形地磚依照如下的規律拼成大三角形

(如圖所示)：其中第 1 個圖由 1 個正六邊形與 3 個正三角形所形成；第 2 個圖由 3 個正六邊形與 7 個正三角形所形成；……；依此類推。設第 n 個圖

由 a_n 個正六邊形地磚與 b_n 個正三角形地磚拼成，請選出正確的選項。



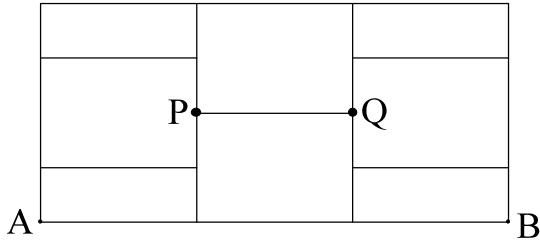
- (1) $b_5 = 31$
- (2) $a_{10} = 56$
- (3) $a_{n+1} - a_n = n$ 對所有的正整數 n 都成立
- (4) $b_n = 2a_n + 1$ 對所有的正整數 n 都成立
- (5) $b_n > n^2$ 對所有的正整數 n 都成立

4. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 對所有的正整數 n 皆滿足 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ ，請選出正確的選項。

- (1) 若 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 3$ ，則 $a_5 = 139$
- (2) 若 $a_1 = 1$ ， $a_2 = -1$ ，則 $a_{10} = -1$
- (3) 若 a_1 、 a_2 是整數且 a_1 是奇數，則數列 $\langle a_n \rangle$ 中的每一項都是奇數
- (4) 若 a_1 、 a_2 是整數且 a_1 、 a_2 都不是 3 的倍數，則數列 $\langle a_n \rangle$ 的每一項都不是 3 的倍數
- (5) 若 $a_1 + a_2 = 3$ ，則 $a_n + a_{n+1} = 3^n$ 對所有的正整數 n 都成立

二、填充題(每題 7 分，共計 63 分)

- 已知一等比數列的首項為 3，公比為 2，則其前 6 項的和為____(1)____。
- 從 1 到 105 的正整數中，是 4 的倍數或 5 的倍數或 6 的倍數者共有____(2)____個。
- 小明到餐廳點用一份套餐，每一份套餐都需點主餐、沙拉和湯品各一種：
 - 主餐：沙朗牛排、香草烤雞、炭烤豬小排、海鮮總匯，共 4 種；
 - 湯品：牛肉湯、玉米濃湯、蔬菜湯，共 3 種；
 - 沙拉：凱薩沙拉、水果沙拉，共 2 種；
 小明決定若主餐點「沙朗牛排」則不搭配「牛肉湯」，且不論點何種主餐，若湯品點「蔬菜湯」則必須搭配「水果沙拉」，至於其他餐點的搭配就沒有限制。在這些要求之下，小明最多有____(3)____種不同的套餐組合可選擇。
- 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1 = 1$ ，且對所有的正整數 n 滿足 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1$ ，則一般項 $a_n =$ ____(4)____。
- 設 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數。已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1 = \frac{1}{7}$ ，且對所有的正整數 n 滿足 $a_{n+1} = 2a_n - [2a_n]$ ，則 $a_{105} - a_{104}$ 的值為____(5)____。
- 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 對所有的正整數 n 滿足 $a_n = \sum_{k=1}^n k(105 - 6k)$ ，則 a_n 的最大值為____(6)____。
- 級數 $\frac{3}{1^3} + \frac{5}{1^3 + 2^3} + \frac{7}{1^3 + 2^3 + 3^3} + \cdots + \frac{2k+1}{1^3 + 2^3 + \cdots + k^3} + \cdots + \frac{19}{1^3 + 2^3 + \cdots + 9^3}$ 的和為____(7)____。
- 如圖，由 A 到 B 依「 \uparrow 」，「 \rightarrow 」，「 \downarrow 」之方向前進，但經過之點不可重複，則經過 P 且經過 Q 的走法共有____(8)____種。



9. 把集合 $\{2^x + 2^y \mid x, y \text{ 為整數且 } 0 \leq x < y\}$ 的元素從小到大排列得到數列 $\langle a_n \rangle$ ，即 $a_1 = 2^0 + 2^1 = 3$ 、 $a_2 = 2^0 + 2^2 = 5$ 、 $a_3 = 2^1 + 2^2 = 6$ 、 $a_4 = 2^0 + 2^3 = 9$ 、 $a_5 = 2^1 + 2^3 = 10$ ，則 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 的值為 (9) 。

三、計算題(9分)

1. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1 = \frac{3}{2}$ ，且對所有的正整數 n 滿足 $a_{n+1} = \frac{3a_n}{1+2a_n}$ 。
- ①試推測數列 $\langle a_n \rangle$ 的一般項。(2分)
- ②用數學歸納法證明你的推測是正確的。(7分)