

104 學年度第一學期第二次定期考高三數甲試題

一、 多重選擇題：(16%，每題至少有一個選項正確，全部答對得 8 分，每答錯一個選項扣 2 分，答錯四個或五個選項或未作答者該題以 0 分計。)

1. 下列各選項中之大小關係，哪些是正確的？

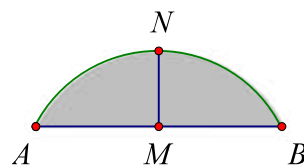
- (A) $\sin 36^\circ - \sin 33^\circ > \sin 26^\circ - \sin 23^\circ$
- (B) $\cos 57^\circ + \cos 53^\circ > 2\cos 55^\circ$
- (C) $\tan 55^\circ + \tan 35^\circ > 2$
- (D) $\cot 78^\circ - \cot 75^\circ > \cot 73^\circ - \cot 70^\circ$
- (E) $\sec 15^\circ + \sec 12^\circ > \sec 16^\circ + \sec 11^\circ$

2. 設 $f(x) = 5\cos x - 12\sin x + 3$ ， $x \in R$ ，關於函數 $y = f(x)$ 及其圖形，下列各選項中之敘述，哪些是正確的？

- (A) $f(x) = 13\cos(x + \alpha) + 3$ 時， α 為第三象限內角
- (B) $f(x) = 13\sin(x + \beta) + 3$ 時， β 為第二象限內角
- (C) $f(x)$ 之最大值為 16
- (D) $f(x)$ 為最小值時， $12\tan x + 5 = 0$
- (E) $f(x)$ 在 $0 \leq x \leq \pi$ 區間中之最小值為 -2

二、 填充題：(66%，每題 6 分。)

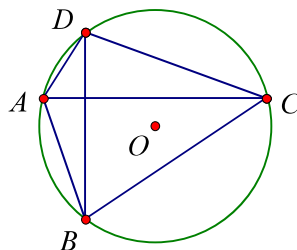
1. 右圖為一弓形，其中 M 、 N 分別是弦 \overline{AB} 與圓弧 \overline{AB} 之中點。若弦 \overline{AB} 之長為 $6\sqrt{3}$ ，矢 \overline{MN} 之長為



3，則此弓形之面積為 (子) 。

2. 坐標平面上，已知 $A(\sin 1, -\cos 1)$ 、 $B(-1 + \cos 2, -\sin 2)$ ， O 為原點，若 $\angle AOB = \theta$ 弧度，則 $\theta =$ (丑) 。

3. 如右圖。已知圓 O 之半徑為 50， \overline{AC} 、 \overline{BD} 為圓 O 上互相垂直之二弦，圓弧 ABC 之長是圓弧 DAB 之長的 2 倍，且 $5\overline{AC} = 6\overline{BD}$ ，則四邊形 $ABCD$ 之面積為 (寅) 。



4. 函數 $f(x) = \sin \frac{5x}{3} + \cos \frac{3x}{2}$ 之週期為 (卯) 。

5. 若 $\tan(x+y) = 2$ ， $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$ ，則 $\tan 2x + \tan 2y$ 之值為 (辰) 。

6. 已知 $\cos(\frac{\pi}{3} + x) = \frac{11}{13}$ ，又知 $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$ ，則 $\cot x \csc x$ 之值為 (巳) 。

7. 設 $x = a\pi + b$ ， a 、 b 都是有理數，若 $0 \leq x \leq \pi$ 且 $\cot x = \frac{\sin 5 - \cos 3 \sin 2}{\cos 5 + \sin 3 \sin 2}$ ，則數對 $(a, b) =$ (午) 。

8. 已知 $f(x) = |2\cos 3x + 1|$ ， $0 \leq x \leq 6\pi$ ；若 $f(x) = 1$ 之 x 恰有 n 個相異實數解，則自然數 n 之值為 (未) 。

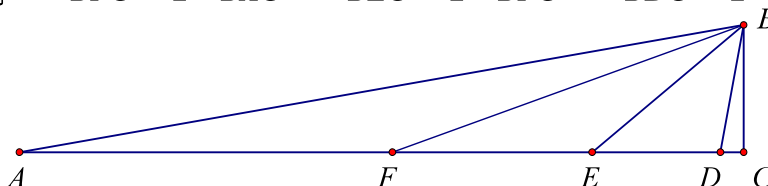
9. 若 $f(x) = 3\sin^2 x + 12\csc^2 x$ ， $x \in \mathbb{R}$ ， $x \neq n\pi$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，則 $f(x)$ 之最小值為 (申) 。

10. 若 $f(x) = \frac{1-6\sin x}{3+\cos x}$ ， $x \in R$ ，則 $f(x)$ 之最大值為 (酉) 。

11. 已知線段 \overline{AB} 是橢圓 Γ 的長軸，點 P 是橢圓 Γ 上的一個點， \overline{PH} 垂直 \overline{AB} 於 H 。若 $25\overline{AH} = 9\overline{HB}$ 且 $\overline{PH} = 30$ ，則橢圓 Γ 之短軸長為 (戌) 。

三、計算與證明題：(18 %。)

1. 如下圖。△ ABC 中，已知 D 、 E 、 F 三點在 \overline{AC} 邊上， $\angle BAC = 10^\circ$ ， $\angle BCA$ 為一直角。 $\angle BFC = 2\angle BAC$ ， $\angle BEC = 2\angle BFC$ ， $\angle BDC = 2\angle BEC$ 。



(1)證明： $\csc 20^\circ + \csc 40^\circ + \csc 80^\circ = \cot 10^\circ - \tan 10^\circ$ ；(6分)

(2)利用(1)，證明： $\overline{AD} = 2\overline{FC}$ 。(3分)

2.

(1)坐標平面上，試證：參數式 $\begin{cases} x = 3\cos^2\theta - 6\cos\theta - 2 \\ y = \sin^2\theta + 2\cos\theta + 3 \end{cases}$ ， $\theta \in R$ 之圖形為

一線段，並求此線段之長度；(6分)

(2)設函數 $f(\theta) = (3\cos^2\theta - 6\cos\theta + 1)^2 + (\sin^2\theta + 2\cos\theta - 2)^2$ ， $\theta \in R$ ，

求 $f(\theta)$ 之值域。(3分)