

# 104 學年度第一學期第一次定期考高一數學試題

一、多重選擇題(每題 7 分，錯 1 選項扣 2 分，扣分扣至該題 0 分為止，共計 28 分)

1. 下列敘述哪些是正確的？

(1) 已知  $n$  為正整數，若有理數  $\frac{n}{5250}$  可以化為有限小數，則  $n$  必為 21 的倍數

(2) 若  $a, b$  為實數且  $a+b$  為有理數、 $ab$  為無理數，則  $a-b$  必為無理數

(3) 若  $a, b$  為實數且  $a^2 - b^2$ ， $a+b$  皆為有理數，則  $a-b$  必為有理數

(4) 若  $a^3$ ， $a^5$  皆為有理數，則  $a^{2015}$  必為有理數

(5) 若  $a, b, c, d$  為實數且滿足  $a+b\sqrt{2} = c+d\sqrt{2}$ ，則  $a=c$  且  $b=d$

2. 關於實數  $a, b, c$  的運算性質，下列敘述哪些是正確的？

(1) 若  $a < b$ ，則  $\frac{a+b}{2} < \frac{2a+3b}{5} < \frac{4a+5b}{8}$

(2) 若  $a^2 > b^2$ ，則  $|a|+b > 0$

(3) 若  $a > b$ ，則  $ac > bc$

(4) 若  $a > b > 0$ ，則  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

(5)  $\sqrt{(a-b)^2} = a-b$

3. 已知一次函數  $y = f(x) = ax + b$  的圖形為一條不通過第四象限的斜直線，則下列敘述哪些是“錯誤”的？

(1)  $a > 0$

(2)  $f(x)$  的圖形與  $y = ax^2$  的圖形恰有 2 個交點

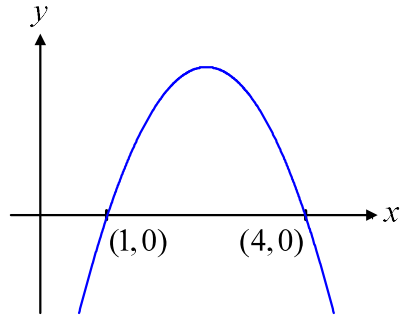
(3)  $f(x)$  的圖形與  $y = ax^3$  的圖形恰有 1 個交點

(4)  $f(x)$  的圖形與  $y = -ax^3$  的圖形恰有 1 個交點

(5)  $f(x)$  不是奇函數亦不是偶函數

4. 若函數  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的圖形與  $x$  軸交於  $(1, 0)$ ,  $(4, 0)$  兩點，其圖形如右圖所示，則下列各數哪些為負數？

- (1)  $a$                       (2)  $b$                       (3)  $c$   
(4)  $b^2 - 4ac$               (5)  $2a + 3b + 4c$



## 二、填充題(每題 6 分，共計 36 分)

- 將循環小數  $9.4\overline{20}$  化為最簡分數 = \_\_\_\_\_。
- 若  $\sqrt{12 - 3\sqrt{12}}$  的小數部分為  $a$ ，則  $a^3 + \frac{1}{a^3} =$  \_\_\_\_\_。
- 已知數線上兩點  $A(-2)$ ,  $B(3)$ 。若  $P$  為直線  $\overline{AB}$  上一點且  $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$ ，則  $P$  之坐標為 \_\_\_\_\_。
- 求解不等式  $3 < |2x + 1| \leq 9$ ，得  $x$  的範圍為 \_\_\_\_\_。
- 已知對任意實數  $x$ ， $f(x) = ax^2 + 2ax + 1$  的值恆為正數，則實數  $a$  的範圍為 \_\_\_\_\_。
- 若將二次函數  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  的圖形向下平移 1 單位後，發現其與  $x$  軸所截出之線段長變為原本的 2 倍，則  $f(x)$  的圖形頂點之  $y$  坐標為 \_\_\_\_\_。

### 三、計算題(各題配分列於題後，共計 36 分)

1. 設多項式  $f(x) = 81x^4 - 27x^3 - 45x^2 + 36x - 5$

$$= a(3x-1)^4 + b(3x-1)^3 + c(3x-1)^2 + d(3x-1) + e。$$

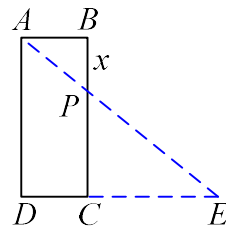
(1) 求實數  $a, b, c, d, e$  的值。(7 分)

(2) 求  $f(0.333)$  的近似值到小數點以下第三位(第四位四捨五入)。

(2 分)

2. 已知  $f(x)$  為 4 次以上的多項式，若  $f(x)$  除以  $(x-1)^2$  的餘式為  $2x-1$ ；除以  $(x-2)^2$  的餘式為  $7x-9$ ，求  $f(x)$  除以  $(x-1)^2(x-2)^2$  的餘式。(9 分)

3. 如下圖所示，矩形  $ABCD$  之長  $\overline{AD} = 12$ 、寬  $\overline{AB} = 5$ 。今在  $\overline{BC}$  上取一點  $P$ ，連接  $\overline{AP}$  並延長交直線  $\overline{CD}$  於點  $E$ 。



(1) 設  $\overline{BP} = x$ ，試將  $\Delta ABP + \Delta ECP$  (兩三角形之面積和) 以  $x$  表示。(3 分)

(2) 試求  $\Delta ABP + \Delta ECP$  的最小值。(4 分)

(3) 當上題之最小值成立時， $\overline{BP} = ?$  (2 分)

4. 已知函數  $f(x) = -|x+2| + 2|x-a| + b|x-5| - 3|x-6|$  有最大值  $\alpha$ 、最小值  $\beta$ ，其中  $a, b, \alpha, \beta$  皆為實數且  $-2 < a < 5$ ， $\alpha + \beta = -2$ 。

試求數對  $(a, b, \alpha)$ 。(9 分)