103 學年度第二學期高二第二次定期考試試題（自）

一、單選題(每題 5 分，共計 10 分)

1. 三元一次聯立方程組$\begin{cases} x-3y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ 5x+5y+2z=3 \end{cases}$的增廣矩陣為$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，

對矩陣 A 進行高斯消去法的一個步驟：第一、二列不改變， 並將第三列減去第二列的五倍成為新的第三列。

試問下列哪一個選項中的矩陣乘積代表對 A 進行上述步驟？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}A$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}A$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}A$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}A$ (E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}A$

2. 空間中，直線$L: x=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}$與下列哪一直線距離最遠？

(A) $L_1: x-2=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$ (B) $L_2: x-1=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-1}{-6}$

(C) $L_3: \begin{cases} x=2+3t \\ y=0 \\ z=3+2t \end{cases}, t\in R$ (D) $L_4: \dfrac{x+1}{2}=y-4=\dfrac{z-2}{3}$

(E) $L_5: \begin{cases} x+y=5 \\ y-z=5 \end{cases}$

二、多重選擇題(每題全對得 6 分，只錯一個選項得 4 分，錯 2 個選項得 2 分，未作答或錯超過 2 個選項者得 0 分，共計 18 分)

1. 空間中，下列何者與L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{3}$有交點？

(A) $2x-y+3z=1$ (B) $x-y-z=0$ (C) $\begin{cases} x=-1-t \\ y=6+2t \\ z=-9-3t \end{cases}$ ， $t\in R$

(D) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-3t \\ z=-3+t \end{cases}$ ， $2\le t\le 3$ (E) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$

2. 下列哪些選項中的矩陣，經過一系列的列運算後可以化成 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ ？

(A) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & -11 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 4 & -8 & -40 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ 。

3. 已知 A、B、C 均爲二階方陣，I 爲二階單位方陣，請選出正確的選項：

(A) 若 A 爲轉移矩陣，且 A 爲可逆矩陣(即反矩陣 A^{-1} 存在)，則 A^{-1} 亦爲轉移矩陣

(B) 若 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ ，則 $AB=BA$

(C) 若 $AB=I=BC$，則 $A=C$

(D) 若 A、B、C 均爲轉移矩陣，則 $A+B+C$ 亦爲轉移矩陣

(E) 若 A 爲轉移矩陣，且 $\det(A)=\det(A^{-1})$ ，則 $A=I$

三、填充題 (每格 6 分，共計 72 分)

1. 若點 $P(x_0, y_0, z_0)$是平面 $x-4y+8z-3=0$ 上一點，則

$\sqrt{(x_0-1)^2+(y_0-1)^2+(z_0-3)^2}$ 的最小值爲____________。

2. 若坐標空間中通過點$A(2, 3, 1)$、$B(0, 2, 5)$，且與直線 $x-1=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ 平行的平面方程式爲 $ax+by+cz=1$，則a, b, c之值分別爲何？

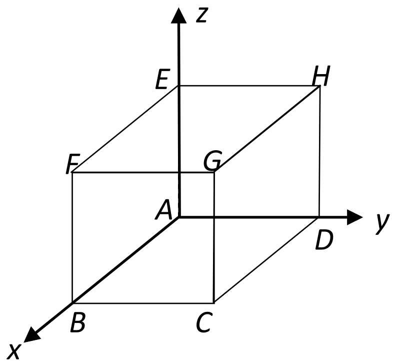
$a=$________, $b=$________, $c=$________。

3. 已知空間中三平面 $x-5y=0$、$3x-7y=0$、$5x-5y+4z=20$ 與 xy 平面圍成之封閉區域爲一四面體，試求四面體之體積爲____________。

4. 空間中，已知直線 $M: x=y-1=z+1$ 爲直線 $L_1: \dfrac{x}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ 與L_2的交角角平分線，

且直線L_2的參數式爲 $\begin{cases} x=at \\ y=1+bt \\ z=-1+t \end{cases}$，$t\in R$，則

a, b之值分別爲何？$a=$________, $b=$________。



5. 如圖，長方體 $ABCD$-$EFGH$ 中，A 爲原點，B、D、E 分別爲 x 軸、y 軸及 z 軸上的點。已知 $\overline{AD}=4$，$\overline{AB}=8$，$\overline{AE}=1$，若對角線 $\overline{BH}$ 上有一點 P 使得 $\overline{PF}\perp\overline{PG}$，則 P 點坐標爲何？____________。

6. 已知 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$ 有唯一解 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$，試求

$\begin{bmatrix} 2b_1 & 3a_1 & c_1 \\ 2b_2 & 3a_2 & c_2 \\ 2b_3 & 3a_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2d_1 \\ 2d_2 \\ 2d_3 \end{bmatrix}$ 之解 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=$__________。

7. 已知 A 爲一矩陣，且 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$，若 $A\begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$，則數對

$(a, b) =$ ______________。

8. 矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & r\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1\\r\end{bmatrix}$，若 $A^nB=\begin{bmatrix}1093\\2187\end{bmatrix}$，$n\in N$ 且 $r\in R$，則數對(n, r) =______________。

9. 已知$\begin{cases}x=2\alpha+\beta\\y=3\alpha+2\beta\end{cases}$且$\begin{cases}\alpha=u+v\\\beta=u-v\end{cases}$，利用矩陣的乘法可得：$\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，其中 A 是一個二階方陣，試求矩陣 A=______________。

10.已知 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\-2 & 2\end{bmatrix}$，試求：

(1) 若 $A^2=aA+bI$，其中 a、b 均爲實數，I 爲二階單位方陣，則數對(a, b) = ______________；

(2) 試求 $A^4-5A^3+9A^2-3A+9I=$ ______________。

11.現有甲報，乙報兩種報紙，經統計後發現：在某社區裡，訂閱甲報者，經一年後仍訂甲報者爲 75%，改訂乙報者爲 25%；訂閱乙報者，經一年後仍訂乙報者爲 60%，而改訂甲報者爲 40%。假設此社區訂報總數不變，且每年均維持相同的訂報變化，在經過長期的觀察下，發現甲、乙兩報的訂報率趨於穩定，則此穩定狀態中，甲報的訂報率應該爲______________。(請化簡至最簡分數)