

103 學年度第二學期高二第二次定期考試試題 (社)

一、 單選題(每題 5 分，共計 20 分)

1. 已知空間中 $A(1, 0, 1)$ 、 $B(0, -5, 1)$ 、 $C(2, 1, -1)$ 、 $D(k+1, k, -7)$ 四點在同一個平面上，試問 k 值為何？

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

2. 空間中，點 $A(2, 2, 3)$ 關於平面 $E: x - y + 2z = 0$ 的對稱點坐標為何？

- (A) (1, 3, 1) (B) (0, 4, -1) (C) (-2, -2, -3)
(D) (0, -4, 1) (E) (3, 1, 5)

3. 若聯立方程組
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ -x + 4y + az = b \end{cases}$$
 有無窮多組解，則數對 $(a, b) = ?$

- (A) (1, 0) (B) (-3, -2) (C) (1, 3) (D) (0, 1) (E) (2, -3)

4. 解下列聯立方程式
$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 5x + 5y + 2z = 3 \end{cases}$$
 時，將相關的係數與常數寫成增廣矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ 對矩陣 } A \text{ 進行高斯消去法的一個步驟：第一、二列}$$

不改變，並將第三列減去第二列的五倍成爲新的第三列。

試問下列哪一個選項中的矩陣乘積代表對 A 進行上述步驟？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} A$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} A$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} A$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$ (E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} A$

二、多重選擇題(每題全對得 8 分，只錯一個選項得 4 分，錯 2 個選項得 2 分，未作答或錯超過 2 個選項者得 0 分，共計 32 分)

1. 已知直線 L 通過點 $(1, 3, -2)$ ，且與直線 $\begin{cases} x-9y+12z=0 \\ 3x-7y+8z=1 \end{cases}$ 平行，試問下列哪
些選項可為 L 的方程式？

(A) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{7}$

(B) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{7} = \frac{z+2}{5}$

(C) $\frac{x+2}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z+6}{5}$

(D) $\begin{cases} x=4-3t \\ y=10-7t, t \in R \\ z=3-5t \end{cases}$

(E) $\begin{cases} x=-2+6t \\ y=-4+10t, t \in R \\ z=-7+14t \end{cases}$

2. 空間中，下列何者與 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{3}$ 有交點？

(A) $2x - y + 3z = 1$ (B) $x - y - z = 0$ (C) $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 6 + 2t, t \in R \\ z = -9 - 3t \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t, 2 \leq t \leq 3 \\ z = -3 + t \end{cases}$ (E) $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$

3. 下列哪些選項中的矩陣，經過一系列的列運算後可以化成 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ ？

(A) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & -11 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 4 & -8 & -40 \end{bmatrix}$

$$(D) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (E) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}。$$

4. 已知 A 、 B 、 C 均為二階方陣， I 為二階單位方陣，請選出正確的選項：

(A) 若 A 為轉移矩陣，且 A 為可逆矩陣(即反矩陣 A^{-1} 存在)，則 A^{-1} 亦為轉移矩陣

(B) 若 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ，則 $AB = BA$

(C) 若 $AB = I = BC$ ，則 $A = C$

(D) 若 A 、 B 、 C 均為轉移矩陣，則 $A+B+C$ 亦為轉移矩陣

(E) 若 A 為轉移矩陣，且 $\det(A) = \det(A^{-1})$ ，則 $A = I$

三、填充題 (每格 6 分，共計 48 分)

1. 若點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $x - 4y + 8z - 3 = 0$ 上一點，則

$\sqrt{(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 3)^2}$ 的最小值為_____。

2. 若坐標空間中通過點 $A(2, 3, 1)$ 、 $B(0, 2, 5)$ ，且與直線 $x - 1 = \frac{y - 3}{2} = \frac{z + 1}{1}$ 平

行的平面方程式為 $ax + by + cz = 1$ ，則 a, b, c 之值分別為何？

$a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 已知空間中三平面 $x - 5y = 0$ 、 $3x - 7y = 0$ 、 $5x - 5y + 4z = 20$ 與 xy 平面圍成之封閉區域為一四面體，試求此四面體之體積為_____。

4. 矩陣 X 、 Y 同時滿足條件： $2X - Y = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ ， $X + Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求矩陣

$X = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 已知 A 為一矩陣，且 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，若 $A \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ，則數對

$(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & r \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix}$ ，若 $A^n B = \begin{bmatrix} 1093 \\ 2187 \end{bmatrix}$ ， $n \in N$ 且 $r \in R$ ，則數對 (n, r) = _____。

7. 已知 $\begin{cases} x = 2\alpha + \beta \\ y = 3\alpha + 2\beta \end{cases}$ 且 $\begin{cases} \alpha = u + v \\ \beta = u - v \end{cases}$ ，利用矩陣的乘法可得： $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ，其中 A 是一個二階方陣，試求矩陣 $A =$ _____。

8. 現有甲報，乙報兩種報紙，經統計後發現：在某社區裡，訂閱甲報者，經一年後仍訂甲報者為 75%，改訂乙報者為 25%；訂閱乙報者，經一年後仍訂乙報者為 60%，而改訂甲報者為 40%。假設此社區訂報總數不變，且每年均維持相同的訂報變化，在經過長期的觀察下，發現甲、乙兩報的訂報率趨於穩定，則此穩定狀態中，甲報的訂報率應該為_____。(請化簡至最簡分數)