

# 103 學年度第二學期高二第三次定期考試試題 (自)

一、多重選擇題：(24%，每題至少有一個選項正確，全部答對得 8 分，每答錯一個選項扣 2 分，答錯五個選項或未作答者得 0 分。)

1. 已知方程式  $x^2 - px + 8y + q = 0$  之圖形是頂點在  $V(3, 2)$  的拋物線，則下列各選項中，哪些選項是正確的？  
(A)  $p = 3$       (B)  $q = 25$       (C) 焦點坐標為  $(1, 2)$   
(D) 準線方程式為  $y = 0$       (E) 此拋物線與直線  $x = 0$  恰有一交點
2. 關於雙曲線  $H: 7x^2 - 9y^2 - 42x + 18y - 9 = 0$ ，下列哪些選項是正確的？  
(A) 中心坐標為  $(3, 1)$       (B) 有一頂點坐標為  $(0, 1)$   
(C) 有一焦點坐標為  $(3, 5)$       (D) 共軛軸長為 6  
(E) 共軛雙曲線方程式為  $7x^2 - 9y^2 - 42x + 18y + 9 = 0$
3. 坐標平面上， $O$  是原點， $A$  是第一象限內一點， $\tau$  是定義為  $\tau(x, y) = (x - y, x + y)$  的一個線性變換，設  $\tau$  的矩陣表示法為  $T$ ，則下列各選項中，哪些選項是正確的？  
(A) 若點  $P = TA$ ，則  $\overline{OP} = 2\overline{OA}$   
(B) 若點  $P = TA$ ，則  $\triangle OAP$  是等腰直角三角形  
(C) 若點  $P = TA$ ，點  $Q = T^{-1}A$ ，則四邊形  $OQAP$  是梯形  
(D) 若點  $P = TA$ ，點  $R = T^2A$ ， $\triangle OAP$  之面積為  $a$ ，則  $\triangle OPR$  之面積為  $2a$   
(E) 若點  $B = T^{10}A$ ，則  $B$  在第三象限內

二、填空題：(60%，每個空格 6 分。)

1. 已知一拋物線，其對稱軸為  $y + 2 = 0$ ，且經過  $(9, 2)$ 、 $(3, 0)$  二點，則此拋物線之頂點坐標為     (甲)    。
2. 坐標平面上，已知方程式  $\frac{x^2}{t^2 - 6t + 2} + \frac{y^2}{t^2} = 1$  之圖形是長軸在  $x$  軸上的橢

圓，其中  $t$  是整數；若此橢圓的長軸長與短軸長都是正整數，則  $t$  之值為 (乙)。

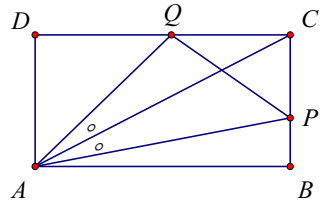
3. 設有一雙曲線，其二漸近線為  $2x+y=0$  與  $2x-y=0$ ，焦點坐標為  $(5,0)$ ，則此雙曲線之實軸長為 (丙)。

4. 拋物線  $\Gamma$  中，已知  $F$  是焦點， $P$  是  $\Gamma$  上一點， $\overline{PH}$  垂直對稱軸於  $H$ ， $H$  在焦點與頂點之間，若  $\overline{PH} = 20$ ， $\overline{PF} = 29$ ，則  $\Gamma$  之正焦弦長為 (丁)。

5. 若不等式  $\sqrt{x^2+18x+126} + \sqrt{x^2-22x+166} \leq 30$  之解為  $m \leq x \leq M$ ，則數對  $(m, M) =$  (戊)。

6. 已知雙曲線  $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$  與  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$  恰有 3 個交點，則經過這 3 個交點之圓面積為 (己)。

7. 如右圖。設  $ABCD$  是長方形， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{BC} = 6$ ；點  $P$ 、 $Q$  分別在  $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$  邊上；若  $\overline{AC}$  平分  $\angle PAQ$ ， $2\overline{AP} = 3\overline{AQ}$ ，則  $\triangle APQ$  之面積為 (庚)。



8. 坐標平面上，若圓  $C: x^2+y^2=90$  被矩陣  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  推移後成為橢圓  $E$ ，則橢圓  $E$  上最右側之點坐標為 (辛)。

9. 平面上，已知  $A$ 、 $B$  都是鏡射矩陣， $A$  之鏡射軸為  $x-y\tan 63^\circ=0$ ， $B$  之鏡射軸為  $x\tan 72^\circ-y=0$ 。若  $M = BA$ ，則二階方陣  $M =$  (壬)。

10. 坐標空間中，若直線  $L: \begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}$  繞  $z$  軸旋轉一周所得為圓柱  $S$ ，則平面  $E: 2x+2y-z=0$  在圓柱  $S$  上所截得之橢圓的長軸長為 (癸)。

三、計算與證明題：(16%)

1. 已知  $A(3^2, 3)$ 、 $B$ 、 $C$  三點都在拋物線  $\Gamma: y^2 = x$  上，且  $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ ，
- (1) 試證：直線  $BC$  必過一定點；(5 分)
- (2) 求直線  $BC$  所必過之定點坐標。(2 分)
2. 已知橢圓  $E: \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{3t-2} = 1$  與雙曲線  $H: \frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{t-2} = 1$  共焦點  $F_1$ 、 $F_2$ ，  
其中  $F_1$  為左焦點；設點  $P$  是橢圓  $E$  與雙曲線  $H$  在第一象限內的交點，
- (1) 求實數  $t$  之值；(3 分)
- (2) 求線段  $\overline{PF_1}$ 、 $\overline{PF_2}$  之長；(3 分)
- (3) 求  $P$  點坐標。(3 分)