

103 學年度第二學期高二第三次定期考試試題 (社)

一、多重選擇題：(32%，每題至少有一個選項正確，全部答對得 8 分，每答錯一個選項扣 2 分，答錯五個選項或未作答者得 0 分。)

- 若拋物線 $x^2 - 2x + py + q = 0$ 經過 $(1, 3)$ 、 $(5, 1)$ 二點，則下列各選項中，哪些選項是正確的？
 - $p = 8$
 - 此拋物線之頂點坐標為 $(1, 3)$
 - 此拋物線之焦點坐標為 $(1, 5)$
 - 此拋物線之準線方程式為 $y = 1$
 - 此拋物線與直線 $y + 2 = 0$ 沒有交點
- 關於方程式 $\Gamma: 2x^2 + 3y^2 - 12x + 6y + k = 0$ 之圖形，下列各選項中，哪些選項是正確的？
 - $k = 21$ 時， Γ 沒有圖形
 - $k = 20$ 時， Γ 之圖形為一點
 - $k = 9$ 時， Γ 是正焦弦長為 6 之橢圓
 - $k = 3$ 時， Γ 是長軸長為 6 之橢圓
 - $k = -6$ 時， Γ 是短軸長為 6 之橢圓
- 關於雙曲線 $H: x^2 - 3y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ ，下列哪些選項是正確的？
 - 中心坐標為 $(1, -1)$
 - 有一頂點坐標為 $(1, 0)$
 - 有一焦點坐標為 $(3, 1)$
 - 貫軸長為 $2\sqrt{3}$
 - 共軛雙曲線之方程式為 $x^2 - 3y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$
- 下列各選項中之直線，哪些與雙曲線 $9x^2 - y^2 - 18x + 18 = 0$ 有 2 個交點？
 - $x + y = 0$
 - $2x + y = 3$
 - $3x + y = 6$
 - $2x - y = -3$
 - $5x - y = 6$

二、填充題：(54%，每個空格 6 分。)

- 設有一拋物線，其頂點坐標為 $(1, 2)$ ，焦點坐標為 $(3, 2)$ ，則此拋物線之準線方程式為 (壹) 。

2. 已知一橢圓，其一焦點坐標為 $(-6, 3)$ ，短軸在直線 $x = 0$ 上，正焦弦長為 10，則此橢圓之長軸長為 (貳) 。
3. 設有一雙曲線，其二漸近線為 $2x + y = 0$ 與 $2x - y = 0$ ，且經過點 $(2, 6)$ ，則此雙曲線之標準式為 (參) 。
4. 若 F 是拋物線 $\Gamma: y^2 = 12x$ 之焦點，點 $A(5, 2)$ ， P 是 Γ 上一點，則 $\overline{PA} + \overline{PF}$ 最小時之 P 點坐標為 (肆) 。
5. 若橢圓 $E: \frac{x^2}{t^2 + t} + \frac{y^2}{22} = 1$ 與雙曲線 $H: \frac{x^2}{2t} + \frac{y^2}{16} = 1$ 共焦點，則實數 t 之值為 (伍) 。
6. 方程式 $\sqrt{x^2 + 10x + 60} - \sqrt{x^2 - 22x + 156} = 12$ 之解為 $x =$ (陸) 。
7. 已知 $x^2 = y + 2$ 與 $y^2 = 8x + 8$ 二拋物線相交於 A 、 B 二點，則直線 AB 之方程式為 (柒) 。
8. 已知 F_1 是雙曲線 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$ 的左焦點， P 在雙曲線右支上，若 $\overline{PF_1} = 17$ ，則點 P 之坐標為 (捌) 。
9. 若橢圓 $E: \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{9} = 1$ 與直線 $L: x + y + k = 0$ 恰有一個交點，則實數 k 之值為 (玖) 。

三、計算與證明題：(14%，每題 7 分。)

1. 已知 F 是拋物線 $\Gamma: y^2 = 12x$ 的焦點， \overline{AB} 是 Γ 之一焦弦， $\overline{AF} = r\overline{BF}$ ， r 是正實數，
(1) 試證： $r = 1$ 時， \overline{AB} 之長最小；(2) 並求 $r = 3$ 時， \overline{AB} 之長。
2. 設 P 為雙曲線 $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上一點， F_1 、 F_2 為二焦點，試證：若 $\angle F_1PF_2$ 為一直角，則 ΔF_1PF_2 之面積為 b^2 。