103 學年度第二學期高三數甲第二次定期考試試題

總分：114 分

一、多重選擇題（每題 6 分，錯一選項扣 2 分，扣分扣至該題 0 分爲止，共計 30 分）

1. 下列哪些函數在 $x=0$ 處可微分？（ $\left[x\right]$ 爲高斯函數）

(1) $f_1(x)=x\left[x\right]$ (2) $f_2(x)=x^2\left[x\right]$ (3) $f_3(x)=\cot x$

(4) $f_4(x)=\begin{cases}\left[x\right] & ,x<0\\ x^2 & ,x\geq 0\end{cases}$ (5) $f_5(x)=x\sin x$

2. 將 $\left[a,b\right]$ 等分爲 n 個子區間，並計算實函數 $f(x)$ 在此區域之上和 U_n 及下和 L_n，若 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\lim\limits_{n\to\infty}L_n=A$，則稱 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可積分（可黎曼積分），並將此極限值 A 以定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 表示。試根據以上說明選出下列正確的選項：

(1) 若 $f(x)$ 是一個可微分函數，則 $f(x)$ 在其定義域內之任意閉區間上皆可積分

(2) 若 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可積分，則 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上連續

(3) 若 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上有界（ $|f(x)|\leq M,\ M$ 爲非負實數 $\forall x\in\left[a,b\right]$ ），則 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可積分

(4) 若 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可積分，則定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 表示函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸、直線 $x=a,\ x=b$ 所圍出的區域面積

(5) 若 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$，則 $f(-x)=-f(x)\ \ \forall x\in\left[-a,a\right]$（即 $f(x)$ 在 $\left[-a,a\right]$ 上爲奇函數）

3. 設 $f(x)$ 爲實函數，下列關於其圖形的敘述，哪些是正確的？

(1) 若在區間(a,b)內$f'(x)\ge 0$恆成立，則$f(x)$在$[a,b]$上為嚴格遞增函數

(2) 若在區間$(c-1,c)$內$f'(x)<0$恆成立、在區間$(c,c+1)$內$f'(x)>0$恆成立，則$f(x)$在$x=c$處有極小值

(3) 若$f''(c)=0$，則$(c,f(c))$為$f(x)$圖形上的一個反曲點

(4) 若$f(x)$有極大值$f(a)$與極小值$f(b)$，則$f(a)\ge f(b)$

(5) 若$f(x)$在$[a,b]$上連續且方程式$f(x)=0$在$[a,b]$內有兩個以上的相異實根，則$f(x)$必有極值

4. 已知$f(x)$的導函數$f'(x)$為實係數六次多項式函數，其完整的圖形如下（圖1）所示，試根據其圖形選出下列關於$f(x)$的正確敘述：

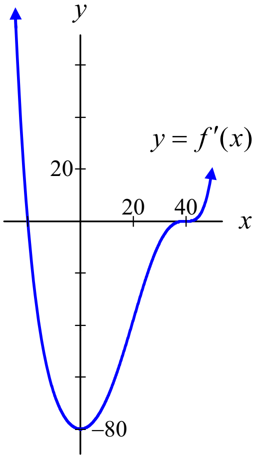
(1) $(40,f(40))$為$f(x)$圖形上的一個反曲點

(2) $f(x)$的圖形有二個反曲點

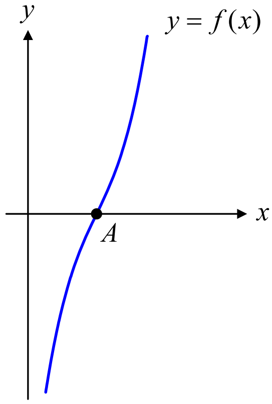
(3) $f(x)$在$x=0$處有極小值

(4) $f(x)$的圖形有二個極值點

(5) $-400<f(10)-f(5)<0$



（圖1）



（圖2）

5. 上（圖 2）為實係數三次多項式函數$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$的圖形，其上一點A為其反曲點，請據此選出下列正確的選項：

$a>0$ (2) $b>0$ (3) $c<0$ (4) $d<0$ (5) $b^2-3ac<0$

二、填充題（每題 8 分，共計 48 分）

1. 若 $f'(1)=2$ ，則 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1+3h)}{2h}=$ __________ 。

2. 若 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(x-6)}$ ，則 $f'(5)=$ __________ 。

3. 設 $f(x)$ 為可微分函數，若 $f(1)=5$ 且 $f'(1)=3$ ，則

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2f(1)-f(x^3)}{x-1}=$ __________ 。

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}\left[(n+3)^3+(n+6)^3+\cdots+(n+3k)^3+\cdots+(n+3n)^3\right]=$ __________ 。

5. $\int_{-2}^{2}\left(x\cos x+\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}\right)dx=$ __________ 。（提示：利用奇、偶函數的性質及函數圖形，並思考定積分的幾何意義）

6. 若對任意實數 x ， $f(x)=x^4+2a^2x^2-8a^3x+5$ 恆正，則 a 值的範圍為 __________ 。

三、計算題（各題配分列於題後，全部 3 大題，共計 36 分）

1. 給定多項式函數 $f(x)=x^3-2x$, $g(x)=x^2$ ，試求：

(1) $f(x)$ 與 $g(x)$ 兩函數圖形之交點坐標。 (3 分)

(2) $f(x)$ 與 $g(x)$ 兩函數圖形所圍出之封閉區域的面積。

(9 分：函數簡圖 2 分,面積列式 4 分,答案 3 分)

2. 在半徑為 r 的半球形容器中裝滿水，然後慢慢的將之傾斜 θ 角。已知

$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ，試求流出容器的水量。(10 分：圖 3 分,列式 4 分,答案 3 分)

3. 若自平面上動點 $P(a,b)$ 向函數 $f(x)=x^3-x+1$ 的圖形可作出三條切線，試回答下列問題：

(1) 求出 P 點坐標 a,b 間需符合的關係式。 (10 分)

(2) 在坐標平面上畫出 P 點所在之區域。 (4 分)