103 學年度第二學期高三數甲第一次定期考試試題

一、多重選擇題（共4題，每題8分，合計32分）

全部選項答對得8分、答錯一個選項得6分、答錯兩個選項得4分、答錯三個選項得2分、不作答或全部選項答錯得0分。

1. 下列哪些選項是正確的？

(1)若 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$，則 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(2)若 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，則無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂

(3)若數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$ 皆爲發散數列，則數列 $\langle a_n+b_n\rangle$ 必爲發散數列

(4)若數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$ 皆爲收斂數列，則數列 $\langle a_n+b_n\rangle$ 必爲收斂數列

2. 下列哪些選項極限值爲 0 ？

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})$　　(3) $\lim_{x\to0}\frac{x^3+|x|^3}{2x^2}$

(4) $\lim_{x\to2}[[x]-x]$，其中 $[x]$ 爲高斯函數

3. 設三次實係數多項式函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，若

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=-2$， $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=1$，則下列哪些選項是正確的？

(1) $f(1)=0$　　(2) $f(3)=0$　　(3) $d=10$　　(4) $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x+2}=\frac{8}{5}$

4. 已知 a,b 均爲實數，且函數 $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{，當}x\le-2\\ ax^2+bx-5 & \text{，當 }-2<x\le1\\ -2x^2+x-1 & \text{，當 }x>1\end{cases}$，若函數

$f(x)$ 在實數集合上爲連續函數，則下列哪些選項是正確的？

(1) $f(1)=1$　　(2) $f(f(2))=-15$　　(3) $a=1$　　(4) $b=-2$

二、填充題（共8題，每題6分，合計48分）

1. 求 $\lim_{x\to 2}(\frac{x-5}{x-2}+\frac{3}{(x-2)(x-1)})$ 之極限值爲___(1)___。

2. 若 a,b 均爲實數，且 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+4n+b})=3$，則 a 之值爲___(2)___。

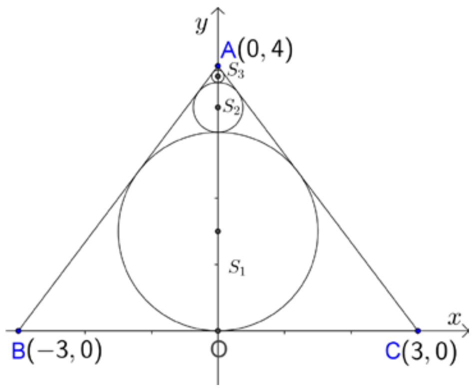
3. 設 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$，且 $S=\lim_{n\to\infty}S_n$，則滿足 $|S-S_n|<0.004$ 的最小正整數 n 之值爲___(3)___。

4. 設 x 爲實數，若級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(2x+1)^{n-1}=\frac{3x+2}{3x+1}$，則 x 之值爲___(4)___。

5. 設 $f(\frac{2x+1}{3x-4})=x$，則函數 $f(x)=$___(5)___。

6. 設 x 爲實數，且函數 $f(x)=\frac{2x^2+3x+8}{x^2+2x+4}$ 之最小值爲 m、最大值爲 M，則實數對 $(m,M)=$___(6)___。

7. 如圖，ΔABC 三頂點坐標爲 $A(0,4),B(-3,0),C(3,0)$。若在 ΔABC 中作內切圓 S_1，再作圓 S_2 與兩邊 $\overline{AB},\overline{AC}$ 及圓 S_1 相切，又再作圓 S_3 與兩邊 $\overline{AB},\overline{AC}$ 及圓 S_2 相切。如此繼續下去，依次得無窮多個圓 $S_1,S_2,S_3,\ldots,S_n,\ldots$，設其面積依次爲 $A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n,\ldots$，則無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 之和爲___(7)___。



8. 若無窮數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足點 (n,a_n) 恆在直線 $y=2x+1$ 上，且數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項和爲 S_n，則 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-n^2}{S_n}$ 之值爲___(8)___。

三、計算證明題（共2題，合計20分）

1. 設 $f(x)=3x^3-5x^2-3x+4$ ，試證：能找到一個實數 c ，滿足 $0<c<1$ ，且 $f(c)=3$ 。(5分)

2. (1)請用數學歸納法證明：對所有正整數n， $3^n \geq 3n$ 恆成立。(6分)

(2)試證明： $\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{4^n}=0$ 。(4分)

(3)試求無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{4^n}$ 的和。(5分)