103 學年度第二學期高三數乙第一次定期考試試題

一、多重選擇題(共 4 題，每題 10 分。每題至少有一個選項是正確的，全對得 10 分，只答錯一個選項得 6 分，只答錯兩個選項得 2 分，不做答或答錯三個選項以上得 0 分，佔 40 分)

1. 關於無窮數列$\langle a_n \rangle$的收斂、發散與極限值的敘述，請選出正確的選項。

   (1) 若$\langle a_n \rangle$為收斂數列，則$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

   (2) 若$\langle a_n \rangle$為收斂數列，且每一項均為負數，則$\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 0$

   (3) 若$\langle a_n \rangle$中有無限多項正數，也有無限多項負數，則$\langle a_n \rangle$必發散

   (4) 若$\langle a_n \rangle$為收斂數列，且$a_n > b_n$對所有正整數n均成立，則$\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

   (5) 若$\langle a_n \rangle$中的每一項均滿足$0 < a_n < 1$，則$\langle a_n \rangle$必收斂

2. 關於無窮級數的收斂、發散與極限值的敘述，請選出正確的選項。

   (1) $0.\overline{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots = 1$

   (2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$是一個收斂級數

   (3) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$是一個發散級數

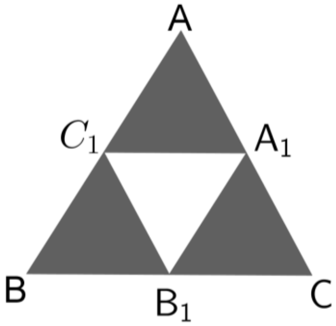
   (4) $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$是一個收斂級數

   (5) 若級數$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收斂，則$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

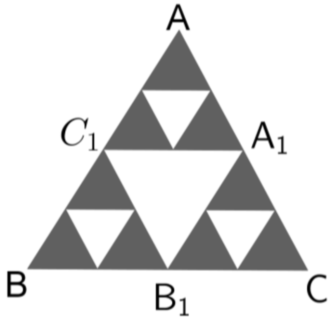
3. 設a, r皆為非零實數，且無窮等比級數$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$是一個收斂級數，關於此收斂級數可能的和，請選出正確的選項。

   (1) $-\frac{a}{2}$　(2) $\frac{a}{2}$　(3) $\frac{2}{3}a$　(4) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$　(5) $\frac{3}{4}a$

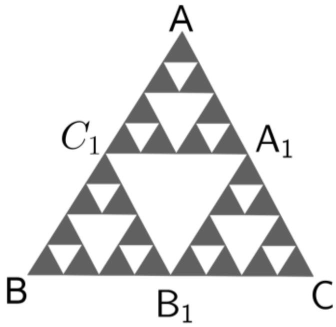
4. 建想要透過數學軟體 GGB 的實作來觀察無窮級數的變化，第 1 個步驟取一個邊長為 12 的正三角形 ΔABC 各邊中點為頂點的三角形 $\Delta A_1B_1C_1$ 來塗成白色(如圖一)，第 2 個步驟取未塗成白色的 3 個正三角形 $\Delta AA_1C_1, \Delta A_1B_1C, \Delta BB_1C_1$ 各邊中點為頂點的三角形來塗成白色(如圖二)，第 3 個步驟取未塗成白色的 9 個正三角形各邊中點為頂點的三角形來塗成白色(如圖三)，依此規律繼續下去。假設第 n 個步驟被塗成白色的正三角形總個數為 S_n ，被塗成白色的某一個正三角形面積為 A_n ，請選出正確的選項。



圖一



圖二



圖三

(1) $S_4 = 27$

(2) 數列 $\langle S_n \rangle$ 的公比是 3

(3) 數列 $\langle A_n \rangle$ 的公比是 $\dfrac{1}{2}$

(4) 第10個步驟所塗色的區域面積總和為 $9\sqrt{3} \times (\dfrac{3}{4})^{10}$

(5) 當 n 趨近於無限大時，此三角形被塗色區域面積總和的極限值為 $36\sqrt{3}$

二、填充題(共 8 格，每格 6 分，佔 48 分。若極限存在，請回答該極限值；若極限不存在，請回答‘不存在’)

5. 試求下列各小題之值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2+2n+1}}{n+1} =$ ________ 。

(2) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+2}{n+1}-\frac{n^2-1}{n-2})=$ ________。

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+4^n}{3^n}=$ ________。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=$ ________。

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n}{3^n}=$ ________。

6. 已知一無窮數列$\langle a_n\rangle$的$a_1=\sqrt{5},a_2=\sqrt{5\sqrt{5}},a_3=\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$，若依此規律繼續下去，則$\lim_{n\to\infty}a_n=$ ________。

7. 若二項式$(1+3x)^n$展開式中x^2的係數為a_n，則$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n^2-1}=$ ________。

8. 若無窮數列$\langle a_n\rangle$中的每一項均滿足$1+2+\cdots+n\le a_n\le 3+4+\cdots+(n+2)$，則$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=$ ________。

三、計算題(每小題 6 分，佔 12 分)

9. 設k為實數，且一無窮等比數列的第n項$a_n=\frac{3(k-1)^n}{2^{2n+1}}$，

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$S=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$，試計算下列各小題：

(1)滿足數列$\langle S_n\rangle$為收斂數列之k的範圍

(2)在$k=2$的條件下，滿足$|S_n-S|<10^{-6}$之最小正整數n　(log2=0.3010)