103 學年度第二學期高一第一次定期考試試題

一、單選題【每題 5 分，共 3 題，總分 15 分】

1. 人社班的齊齊想要申請建中的獎學金，學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格申請獎學金。

   一、數學成績或英文成績或國文成績 85 分（含）以上；

   二、上學期的學期平均成績 80 分（含）以上。

   已知齊齊上學期數學 70 分、國文 84 分而且他**不符合**申請獎學金的資格。請問下列哪一個選項的推論是正確的？

   (A) 齊齊的英文成績未達 85 分

   (B) 齊齊的學期平均未達 80 分

   (C) 齊齊的英文成績 85 分以上但學期平均未達 80 分

   (D) 齊齊的英文成績未達 85 分或學期平均未達 80 分

   (E) 齊齊的英文成績未達 85 分且學期平均未達 80 分。

2. 在 2014 年的美國職籃球比賽(NBA)中，是由熱火隊與馬刺隊爭奪總冠軍(七戰四勝制)。若今已比賽三場，由馬刺隊取 2 勝 1 負領先，且在往後的比賽中有 K 種情形可以決定出勝隊(比賽沒有和局)，則 K 之值為下列哪一個選項？

   (A) 9　(B) 10　(C) 11　(D) 12　(E) 13。

3. 若數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1=\frac{1}{7}$，$a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n(1-a_n)$，對所有 n 為自然數均成立，則 $a_{2015}-a_{104}$ 之值為下列哪一個選項？

   (A) $\frac{3}{7}$　(B) $-\frac{3}{7}$　(C) 0　(D) $-\frac{2}{7}$　(E) $\frac{2}{7}$。

二、多重選擇題【每題全對得 8 分，每錯一個選項扣 3 分，未作答得 0 分。共 2 題，總分 16 分】

1. 設$\langle a_n \rangle$與$\langle b_n \rangle$為兩數列且c為實數，下列選項哪些是正確的？

(A) $\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$

(B) $\sum_{k=1}^{n}(c+a_k)=c+\sum_{k=1}^{n}a_k$

(C) $\sum_{k=2}^{10}a_k=\sum_{m=1}^{9}a_{m+1}$

(D) 若$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+3$，對所有自然數均成立，則數列$\langle a_n \rangle$為等差數列

(E) 若$b_n=1+2+3+\cdots+n$為等差級數，其中n為自然數，則$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}<2$，對所有自然數$n$均成立。

2. 設集合U的元素為有限多個(即$n(U)<\infty$)，且集合A與集合B都是宇集U的子集。若A'與B'分別表示A與B的補集，則下列選項那些是正確的？

(A) 若$A\subset B$，則$B'\subset A'$

(B) 積集合$A\times B=B\times A$

(C) $(A\cup B)'=A'\cup B'$

(D) $n(A-B)=n(A)-n(B)$

(E) $n(A'\cap B')=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$。

三、填充題【共 8 格，總分 42 分，計分公式如下】(參考的求和公式：

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$)

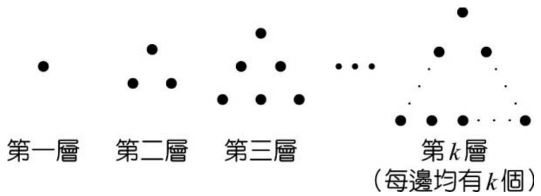
答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8
分數	6	12	18	24	30	34	38	42

1. 級數$7^2+9^2+11^2+\cdots+25^2$之和為________A________。(數列：7，9，11，… ，25 為等差數列)

2. 級數$1\times19+2\times18+3\times17+4\times16+\cdots+19\times1$之和為______B______。(數列：1，2，3，⋯　，19 為等差數列；數列：19，18，17，⋯，1 亦為等差數列)

3. 若等比數列$\langle a_n\rangle$首項$a_1=3$，末項$a_n=768$且總和$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=513$，則數列$\langle a_n\rangle$之項數$n$為______C______。

4. 將小彈珠排成下列的形狀：

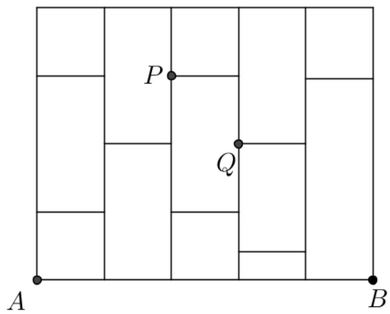


，則第 1 層至第 20 層小彈珠的**總個數**有______D______個。

5. 設平面上通過**同一個定點**的n個圓最多可以將平面分割成a_n個區域，則a_{10}之值為______E______。

6. 浩角同學某天帶了 24 根等長牙籤來學校。若浩角同學某天上課時覺得無聊，開始試著**用完** 24 根等長的牙籤排出三角形，則**不全等**的三角形共有______F______種。

7. 設有一街道圖如右圖，小瑜由A走到B。若規定可以走→，↑，↓，但**走過的道路不可重複走**，則由A走到B，不經過P點且不經過Q點的走法共有______G______種。



8. 觀察下表(每一行、每一列中的數字皆形成等差數列，且有無窮多項)：

1	3	5	7	9	…
3	6	9	12	15	…
5	9	13	17	21	…
7	12	17	22	27	…
9	15	21	27	33	…
11	18	25	32	39	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

上表中，717 總共出現_____H_____次。

四、計算證明題【共 2 題，總分 27 分，須有計算過程否則不予計分。】

1. 設 $a_n = 3^{2n-1} + 2^{n+4}$ ，其中 n 為自然數。

(1) 試求 a_1 與 a_2 之值。(2 分)

(2) 若已知 a_n 恆為某個質數 p 之倍數，則試推測 p 之值應為何？(2 分)

(3) 利用<u>**數學歸納法**</u>證明(2)之推測。(7 分)

2. 設集合 $U = \{k \mid 1 \le k \le 400, k \in \mathrm{N}\}$ 且 A ，B ，C 分別為在集合 U 中 2，3 與 5 的倍數所成的集合。

(1) 試求 $n(A \cup B \cup C)$ 之值。(5 分)

(2) 設集合 C' 表示集合 C 在宇集 U 中的補集，試求 $n\left((A \cup B) \cap C'\right)$ 之值。(5 分)

(3) 設集合 D 表示 1 到 400 中被 3 除餘數為 1 所有自然數所成集合。試求：

(i) $n(D)$ 之值。(2 分)　　(i) $n(C \cup D)$ 之值。(4 分)