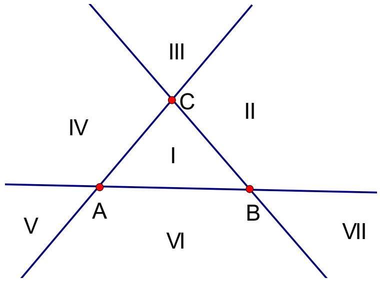
103 學年度第一學期高二第三次定期考試試題（自）

一、多重選擇題　(10 分*4：每題全對得 10 分，每錯一個選項扣 2 分，即錯一個選項得 8 分，錯二個選項得 6 分，以此類推)

1. 如圖，ΔABC 三邊所在的直線把平面分成七個區域，試問下列敘述哪些是<u>正確</u>的？



(1) 若 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AB}$，則 P 點在區域 III

(2) 若 $\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{BC}$，則 Q 點在區域 VI

(3) 若 $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，則 R 點在區域 II

(4) 若 $\overrightarrow{AS}+2\overrightarrow{BS}+3\overrightarrow{CS}=\vec{0}$，則 S 點在區域 I

(5) 若 $\overrightarrow{TA}-2\overrightarrow{TB}+3\overrightarrow{TC}=\vec{0}$，則 T 點在區域 IV

2. 已知 A 為直線 $L:3x-5y=0$ 上一點，$P(a,b)$ 為直線外一點，若 P 關於直線 L 的對稱點為 Q，試問下列敘述哪些是<u>正確</u>的？

(1) $\overrightarrow{PQ}\cdot(3,-5)>0$

(2) $(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ})\cdot(3,-5)$ 可能是正數

(3) Q 可能是 $(-a,-b)$

(4) 存在實數 t，使得 Q 的坐標為 $(a+5t,\ b+3t)$

(5) $\overline{PQ}=\dfrac{2\left|\overrightarrow{AP}\cdot(3,-5)\right|}{\sqrt{34}}$

3. 已知 xy 平面上有兩直線 $L_1:\sqrt{3}x-\sqrt{6}y-19=0,\ L_2:\sqrt{7}x+\sqrt{2}y+17=0$。令 $\vec{n}_1=(\sqrt{3},-\sqrt{6})$，$\vec{n}_2=(\sqrt{7},\sqrt{2})$，試問下列敘述哪些是<u>正確</u>的？

(1) $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2<0$

(2) $|\vec{n}_1|=|\vec{n}_2|$

(3) 向量$(\sqrt{3}+\sqrt{7},-\sqrt{6}+\sqrt{2})$平分兩向量$\vec{n}_1,\vec{n}_2$的夾角

(4) 直線$(\sqrt{3}x-\sqrt{6}y-19)+(\sqrt{7}x+\sqrt{2}y+17)=0$通過$L_1,L_2$的交點

(5) 直線$(\sqrt{3}x-\sqrt{6}y-19)+(\sqrt{7}x+\sqrt{2}y+17)=0$爲$L_1,L_2$鈍夾角的角平分線

4. 設$\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，$\vec{c}=(c_1,c_2)$爲任意三向量，定義符號$<\vec{a},\vec{b}>$表示行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$的值，若$\vec{a},\vec{b}$的夾角爲$\theta\ (0^\circ<\theta<180^\circ)$，則可知當向量$\vec{a}$可經由逆時鐘旋轉$\theta$後，轉至與$\vec{b}$同方向時，所得$<\vec{a},\vec{b}>$爲正，而若爲順時鐘旋轉時，所得$<\vec{a},\vec{b}>$爲負，試問下列敘述哪些是<u>**正確**</u>的？

(1) 由$\vec{a},\vec{b}$所張的平行四邊形面積爲$<\vec{a},\vec{b}>$的絕對值，即$\left|<\vec{a},\vec{b}>\right|$

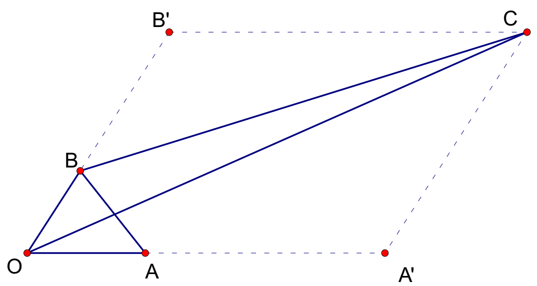
(2) $<\vec{a},k\vec{a}+\vec{b}>=<\vec{b},\vec{a}>$

(3) $<\vec{a},\vec{b}+\vec{c}>=<\vec{a},\vec{b}>+<\vec{a},\vec{c}>$

(4) $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$的解$(x,y)$與$x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}$的解$(x,y)$相同

(5) 向量$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$及$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$的相對關係如下圖，且$OA'CB'$爲平行四邊形，若$x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}$，則$x=\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\dfrac{a\Delta OCB}{a\Delta OAB}=\dfrac{\frac{1}{2}<\vec{c},\vec{b}>}{\frac{1}{2}<\vec{a},\vec{b}>}=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$

($a\Delta OAB$表示ΔOAB的面積)



二、填充題 (9 分*4)

1. 有一條東西向的河流，水的流速為由西向東 4 公里/小時，有一個救護站 A 在河岸邊，今在對岸 B 點有人求救，且 B 在 A 的東北方，救護員從 A 開船前往求援，若開往 B 的過程，船速固定，則船速的大小最少要________公里/小時，才可以直線前往 B 處救援。 (船行進的方向為船速與水流速兩向量相加的結果)

2. 在 ΔABC 中，三邊長 $\overline{AB}=5, \overline{BC}=6, \overline{CA}=7$，點 P 在 $\overline{BC}$ 上，若 P 點到 $\overline{AB}, \overline{CA}$ 的距離分別為 x, y，則 x^2+y^2 的最小值為_______。

3. 設 ΔABC 的外心為 O，若 $3\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{CA}+5\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，則 $\cos A$ 的最小值為_______。

4. 圓內接四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=2, \overline{BC}=3, \overline{CD}=4, \overline{DA}=5,$ ，若 $\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$，則實數數對 (m, n)=_______。

三、計算證明題 (10 分；4 分，4 分，6 分)

1. 平面上有五個相異點 A, B, C, D, E，其中任意三點不共線，已知 $2\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}=3\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{EC}$，

   試證：四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形 (10 分)

2. 平面上有四個點 O, A, B, C，若 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=2\sqrt{5}, \left|\overrightarrow{OB}\right|=5, \left|\overrightarrow{OC}\right|=3, \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=10$，則

   (1) $\overline{AB}$ 的長度為何？ (4 分)

   (2) ΔOAB 的面積為何？ (4 分)

   (3) ΔABC 面積的最大值為何？ (6 分)