103 學年度第一學期高三數甲第三次定期考試試題

一、單選擇題：共 3 題。每題答對得 6 分，答錯得 0 分。

1. 設 $z=\cos 1+i\sin 1$，在複數平面上，點 A 代表複數 z^{20}，則點 A 位在下列哪一個選項？

(1)第一象限　(2)第二象限　(3)第三象限(4)第四象限　(5)x 軸上

2. 設 z 爲複數，若 $\left|\dfrac{z+1}{z-2}\right|=\dfrac{1}{2}$ ，$\mathrm{Arg}(\dfrac{z-2}{z+1})=\dfrac{\pi}{3}$ ，則 z^8 之值爲下列哪一個選項？

(1) $128+128\sqrt{3}\,i$　(2) $128-128\sqrt{3}\,i$　(3) $-128+128\sqrt{3}\,i$

(4) $-128-128\sqrt{3}\,i$　(5) $128\sqrt{3}+128i$

3. 設 $z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ ，則複數 $z-1$ 的絕對值爲下列哪一個選項？

(1) $\sin\dfrac{2\pi}{9}$　(2)$2\sin\dfrac{2\pi}{9}$　(3) $2\sin\dfrac{\pi}{9}$　(4) $2-2\cos\dfrac{2\pi}{9}$　(5) $\sqrt{1-\cos\dfrac{2\pi}{9}}$

二、多重選擇題：共 5 題。每題至少有一個選項是正確的，選出正確選項。每題答對得 8 分，未答者不給分。全對得 8 分，錯一個選項得 5 分，錯二個選項得 2 分，錯三個或三個以上選項得 0 分。

1. 設 O 爲複數平面上的原點，並令點 A、B 分別代表非零複數 z、w。若 $\angle AOB=60°$，則下列哪些選項必爲**負實數**?

(1)$(zw)^3$　(2) $(z\overline{w})^3$　(3) $\dfrac{z}{w}$ (4) $\dfrac{z^3}{w^3}$ (5) $\dfrac{z^9}{w^9}$（其中 $\overline{w}$ 爲 w 的共軛複數）

2. 設 z 爲複數，且 $|z|=2$ ，$\mathrm{Arg}(z)=\dfrac{5\pi}{6}$ ，$\overline{z}$ 爲 z 的共軛複數，Arg(z)表示複數 z 的主輻角，則下列哪些選項是正確的？

(1) $\mathrm{Arg}(2z)=\dfrac{5\pi}{6}$　(2) $\mathrm{Arg}(3\overline{z})=-\dfrac{5\pi}{6}$　(3) $\mathrm{Arg}(z^3)=\dfrac{5\pi}{2}$　(4) $\mathrm{Arg}(\dfrac{2}{z})=\dfrac{7\pi}{6}$

(5) $\mathrm{Arg}(z^n)=n\cdot\mathrm{Arg}(z)$ ，其中 n 爲正整數

3. 在複數平面上，若 $\Gamma=\{\,z\,|\,z$ 爲複數，且 $|\,z-1\,|=1\}$，則下列哪些點會落在圖形

$\Omega=\{w|w=-iz，z\in\Gamma\}$上？

(1) $2i$　(2) $-2i$　(3) $1+i$(4)$1-i$　(5) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

4. 以方程式 $z^6=-4-4\sqrt{3}i$ 的所有根在複數平面上對應的點爲頂點產生六邊形 $ABCDEF$，設原點 O，則下列哪些選項是正確的？

(1) $\overline{OA}=2$　(2) $\angle ABC=150°$　(3)六邊形 $ABCDEF$ 的面積爲 $3\sqrt{3}$

(4)六邊形 $ABCDEF$ 的周長爲 $3\sqrt{2}$

(5) $\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9})$ 爲方程式 $z^6=-4-4\sqrt{3}i$ 的一個根

5. 設 $\omega=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$，$\omega$ 爲方程式 $x^7=1$ 的一虛根，則下列哪些選項是正確的？

(1) $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{2015}$ 是一個實數

(2) $|\omega^4-1|>|\omega^3-1|>|\omega^2-1|>|\omega-1|$

(3) $|\omega^k-1|>0.7$，對 $k=1$，2，3，4，5，6 時皆成立

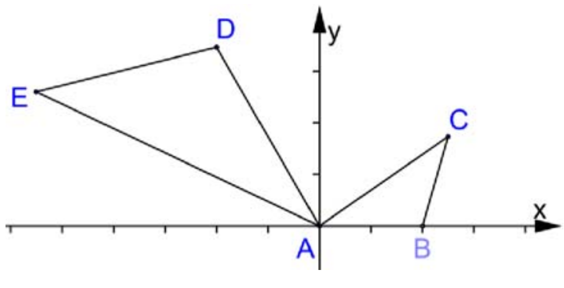
(4) $(\omega^{15}-1)(\omega^{16}-1)(\omega^{17}-1)(\omega^{18}-1)(\omega^{19}-1)(\omega^{20}-1)=1$

(5) $\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}\cdot\sin\frac{5\pi}{7}\cdot\sin\frac{6\pi}{7}=\frac{7}{32}$

三、填充題：共 6 題。每題答對得 7 分，共 42 分。

1. 化簡 $\frac{(\sin 94^\circ+i\sin 4^\circ)^{10}\times(\cos 5^\circ+i\sin 175^\circ)^6}{(\cos 2^\circ-i\sin 2^\circ)^{10}}$ 之值爲____________。(化爲 $a+bi$，其中 a、b 皆爲實數的形式)

2. 在複數平面上，如圖，點 A、B、C 所代表的複數分別是 0 , 2, $\frac{5}{2}+\sqrt{3}i$，點 E 所代表的複數爲 $a+bi$，其中 a、b 皆爲實數；若



$\triangle ADE \sim \triangle ABC$（其中點 D 對應點 B，點 E 對應點 C），且點 D 所代表的複數爲 $-2+2\sqrt{3}i$，則複數 $a+bi$ 之值爲____________。

3. 設 n 爲正整數，又 $1 \le n \le 120$，已知 $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$，且 z^n 爲實數，則滿足條件的所有 n 的和爲____________。

4. 設方程式 $x^3-3x+4=0$ 之三個複數根 α、β、γ，在複數平面上所對應的點分別爲 A、B、C，而 P 點表示複數 i，則 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}$ 之值爲____________。

5. 設 $f(x)=x^{100}+x^{50}$，則 $f(-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})$ 之值爲____________。（化爲 $a+bi$，其中 a、b 皆爲實數的形式）

6. 設實數 $a>0$，$z=\dfrac{\sqrt{2}\,(2a-i)^2}{(1-i)^3\,(a-3i)^2}$，若 $|z|=\dfrac{1}{3}$，則實數 a 之值爲____________。