

103 學年度第一學期高三數乙第一次定期考試試題

註：樣本數為 n ，成功比例為 \hat{p} 的白努力試驗，母體成功的比例 p 在95%信

$$\text{心水準下的信賴區間爲} [\hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}]$$

一、多重選擇題：(共30分，每題有5個選項，其中至少有1個選項是正確的，每題全對得6分，只答錯1個選項得4分，只答錯2個選項得2分，其他得0分；整題未作答得0分)

1. 設 X 、 Y 為二隨機變數，以 $E(X)$ 表示期望值， $Var(X)$ 表變異數，請選出正確的選項。

- (1) $Var(-2X + 3) = 4Var(X) + 3$ (2) $E(2X - 3) = 2E(X) - 3$
(3) $Var(-2X) = -2Var(X)$ (4) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
(5) $E(X^2) = E(X) \cdot E(X)$

2. 關於 A 、 B 、 C 三事件的敘述，請選出正確的選項。

- (1) 若 $P(A'|B) = P(A')$ ，則 A' 、 B 為獨立事件。
(2) 若 A 、 B 為獨立事件，且 B 、 C 為獨立事件，則 A 、 C 亦為獨立事件。
(3) 若 A 、 B 為獨立且互斥事件時，則 A 、 B 中至少有一事件為空事件。
(4) 若 A 、 B 、 C 兩兩互為獨立事件，則 A 、 B 、 C 三事件為獨立事件。
(5) 若投擲一均勻骰子， A 事件為投擲出點數1點或2點， B 事件為投擲出點數2點或3點，則 A 、 B 為獨立事件。

3. 學校為了解學生對合作社的滿意度，隨機抽取400人，其中滿意者有320人，在95%的信心水準下，請選出正確的選項。

- (1) 此次調查贊成的比例為80% (2) 抽樣誤差為3個百分點
(3) 抽樣誤差為4個百分點 (4) 信賴區間為 $[0.76, 0.84]$
(5) 若將隨機抽取的人數變成1600人時，則信賴區間的長度會變成原來的一半。

4. 某訓練招收 120 名學員，以報到先後順序賦予 1 到 120 的學號。開訓一個月之後，班主任計畫從這 120 位學員中抽出 20 位來參加時事測驗。他擬定了四個抽籤方案：

方案一：在 1 到 60 號中，隨機抽出 10 位學員；同時在 61 到 120 號中，也隨機抽出 10 位學員，共 20 位學員參加測驗。

方案二：在 1 到 80 號中，隨機抽出 12 位學員；同時在 81 到 120 號中，也隨機抽出 8 位學員，共 20 位學員參加測驗。

方案三：將 120 位學員平均分成 10 組；在每組 12 人中隨機抽出 2 人，共 20 位學員參加測驗。

方案四：擲一粒公正的骰子：如果出現的點數是 a 點，則由學號是 6 的倍數加上 a 的學員(含學號為 a 的學員)參加測驗，共 20 位學員參加測驗（例： $a=1$ ，則取 1,7,13,19,⋯,115）。

請選出正確的選項。

- (1) 方案一中，每位學員被抽中的機率相等
- (2) 方案二中，每位學員被抽中的機率相等
- (3) 方案三中，每位學員被抽中的機率相等
- (4) 方案四中，每位學員被抽中的機率相等。
- (5) 方案一與方案三中，每位學員被抽中的機率相等

5. 某校學生有 1000 名，數學段考成績呈常態分配，平均數為 μ ，標準差為 σ ，大約有 68% 的資料落在區間 $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ 內，大約有 95% 的資料落在 $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ 內，若平均分數 70 分，而母體標準差 10 分，請選出正確的選項。

- (1) 約有 160 人不及格
- (2) 約有 340 人的成績介於 70 分到 80 分之間

- (3) 甲生考 90 分約排在全校 50 名
 (4) 乙生考 50 分約排在全校 975 名
 (5) 甲生考 90 分，丙生考 80 分，則甲、丙兩人的名次約差 135 名

二、填充題：(每 1 題到第 10 題，每格 6 分，共 60 分)

- 袋中有大小相同的 1 到 4 號球各 1 顆，一次由袋中取兩球，每一球被抽到的機率均等，其球號乘積的期望值為_____。
- 某砲手射擊目標命中率 4 成，今對一目標射擊，每次射擊互不影響。他至少要發射_____發砲彈，方能保證至少有一次擊中目標的機率在 0.99 以上。(已知 $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ， $\log 7 = 0.8451$)
- 為講解信賴區間與信心水準，數學老師請全班 40 位同學使用老師分別提供的亂數表模擬投擲均勻銅板 16 次。模擬的過程如下：隨機指定給每位同學亂數表的某一列，該列從左到右有 16 個數字；如果數字為 0, 1, 2, 3, 4 時，對應投擲銅板得到正面；而數字為 5, 6, 7, 8, 9 時，對應投擲銅板得到反面。林同學拿到的一列數字依序為：

0612 9687 4251 9138

- ，依此資料林同學所得到正面比例的 95% 信賴區間為 $[a, b]$ ，則 $b =$ _____。
 (依四捨五入法，求到小數點後第二位)
- 設 A 、 B 為樣本空間中的兩事件，滿足 $P(A) = \frac{2}{3}$ ， $P(B) = \frac{2}{5}$ 且 $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ ，則 $P(A|B) =$ _____。
 - 一袋中共有 5 顆黑球，4 顆白球，每一球被抽到的機率皆相同，每次從袋中隨機取出 2 球，取後放回袋中，共取 9 次， X 代表取到的 2 球都是黑球的次數，則變異數 $Var(X) =$ _____。
 - 丟一個公正銅板 5 次，令 X 表 5 次中出現正面的次數，則 $P(1 \leq X \leq 3) =$ _____。(答案化成最簡分數)

7. 某營養學研究者想了解女生有服用保健食品的比率，最近做了類似調查，宣稱在 95% 信心水準下，有服用保健食品的比率的信賴區間為 $[0.18, 0.22]$ 。則本次調查的有效樣本共有_____人。
8. 甲、乙兩人打靶的命中率分別為 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{1}{2}$ ，且各次射擊間互不影響。今甲、乙兩人同打一靶各打兩發，則此靶恰中兩發的機率為_____。
9. 某公司生產 20 個產品中，有 5 個不良品，每件產品被抽到的機率均等。今逐一加以檢查，且取出後不放回，則在第 3 次取到第 2 個不良品的機率為_____。
10. 一個不透明的箱子中有十個球，編號 1 至 10，每一球被抽到的機率均等，若從此箱中任意抽取 3 個球，在抽中的球有一個是 6 號球的條件下，則所抽中的 3 個球之號碼均不連續的機率為_____。

三、計算題：(10分)

1. 袋中有 3 顆白球與 4 顆黑球，每次隨機從袋中抽出 1 球，袋中每一球被抽到的機率皆相同，抽出後不放回，直到抽中黑球時遊戲結束。若在第 k 次抽到黑球，則得到 k 元獎金。試求：
- (1) 此遊戲可獲得獎金的期望值 (5分)
- (2) 此遊戲可獲得獎金的標準差 (5分)。(答案均化為最簡分數)