

103 學年度第一學期高一第一次定期考試試題

一、單選題：每題 5 分，共 10 分。

1. 將函數 $y = 3x^4$ 之圖形對 x 軸作鏡射(對稱)後，沿 x 軸向左平移 5 單位，再平行 y 軸向下平移 2 單位，得到新的函數圖形，則此新函數可表示為下列哪個選項？

(1) $y = -3(x-5)^4 - 2$ (2) $y = -3(x+5)^4 - 2$ (3) $y = -3(x+5)^4 + 6$

(4) $y = -\frac{1}{3}(x-5)^4 - 2$ (5) $y = -\frac{1}{3}(x+5)^4 - \frac{2}{3}$

2. 設 $a > 0$ ，二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 滿足 $f(3-x) = f(3+x)$ 。令 $P = f(0)$ ， $Q = f(\sqrt{50})$ ， $R = f(-\pi)$ ，則 P 、 Q 、 R 三數的大小關係是下列哪個選項？

(1) $P > Q > R$ (2) $Q > R > P$ (3) $Q > P > R$ (4) $R > Q > P$ (5) 無法確定

二、多選題：每題有 4 個選項，所有選項均答對者，得 6 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個或 2 個選項以上者，得 0 分。每題 6 分，共 18 分。

1. 下列有關有理數與無理數性質的敘述，請選出正確的選項。

(1) 若 a 、 b 為有理數且 $ab \neq 0$ ，則 $a + b\sqrt{3}$ 的值可能為 0。

(2) 設 a 、 b 為實數。若 $a + b$ 和 $a - b$ 都是有理數，則 a 與 b 皆為有理數。

(3) 設 a 、 b 為有理數， x 、 y 為無理數。若 $a + x = b + y$ ，則 $a = b$ 且 $x = y$ 。

(4) 設 a 、 b 為無理數。若 ab 為有理數，則 $\frac{a}{b}$ 必為無理數。

2. 下列有關有實數性質的敘述，請選出正確的選項。

(1) 設 x 為大於 1 的正數，則 $x + \frac{1}{x} > 2$ 恆成立。

(2) 設 a 、 b 為實數。若 $a^3 > b^3$ ，則 $|a| > |b|$ 。

(3) 設 a 、 b 、 c 為實數。若 $|a-c|=3$ ， $|a-b|=4$ ，則 $|b-c| \leq 7$ 。

(4) 設 a 、 b 、 c 為實數。若 $ac < 0$ ，則函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形必會通過四個象限。

3. 設 a 、 b 為任意實常數，且 $a \neq 0$ 。已知多項式 $f(x)$ 除以 $(x-b)$ 的商式為 $Q(x)$ ，餘式為 r ，請選出正確的選項。

(1) $[af(x)+b]$ 除以 $(x-b)$ 的商式為 $aQ(x)$ ，餘式為 $ar+b$ 。

(2) $xf(x)$ 除以 $(x-b)$ 的商式為 $xQ(x)$ ，餘式為 br 。

(3) $f(ax)$ 除以 $(ax-b)$ 的商式為 $aQ(x)$ ，餘式為 r 。

(4) $f(\frac{b}{a}x)$ 除以 $(x-a)$ 的商式為 $\frac{b}{a}Q(\frac{b}{a}x)$ ，餘式為 r 。

三、填充題：每格 6 分，共 42 分。

1. 若滿足不等式 $|ax+3| > b$ 的範圍是 $x < -4$ 或 $x > 8$ ，則 $a+b$ 之值為_____。

2. 若 $\sqrt{11+4\sqrt{4-\sqrt{12}}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b 且 $0 < b < 1$ ，則 b 之值為_____。

3. 若 $0 < x < 1$ ，則方程式 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} = 3x + 1$ 的解為 $x =$ _____。

4. 設 $f(x) = 81x^4 - 162x^3 + 135x^2 - 60x + 15 = a(3x-1)^4 + b(3x-1)^3 + c(3x-1)^2 + d(3x-1) + e$ ，試求 $a+b+c+d+e$ 之值為_____。

5. 求 $3(\frac{-1+2\sqrt{7}}{3})^4 + 2(\frac{-1+2\sqrt{7}}{3})^3 - 12(\frac{-1+2\sqrt{7}}{3})^2 - 5(\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}) + 8$ 之值為_____。

6. 設 $f(x)$ 為一多項式，若多項式 $(x-1)f(x)$ 除以 x^2+x-1 的餘式為 $x-3$ ，則 $f(x)$ 除以 x^2+x-1 的餘式為_____。

7. 已知二次函數 $f(x)$ 的首項係數為 1，其圖形之對稱軸為 $x=1$ 且頂點在直線 $y=x+k$ 上。若 $y=f(x)$ 的圖形恆在直線 $y=kx$ 的上方，則實數 k 的範圍為_____。

四、計算及證明題：每題 10 分，共 30 分。

1. (1) 設 $x = \sqrt[3]{3+\sqrt{10}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{10}}$ ，試求 $x^3 + 3x$ 之值為何？(4 分)

(2) 設 a 、 b 為正整數，其中 $1 < a < 10$ 且 $a - \sqrt{b} \neq 0$ 。已知 $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}} = 2$ ，試求 a 、 b 之值各為何？(6 分)

2. 已知 a 、 b 、 c 皆為正整數且 $\frac{b-\sqrt{2}c}{a-\sqrt{2}b}$ 為有理數，試證明： $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ 是一整數。

3. 設函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2, & x \geq 0 \\ 3x + 5, & x < 0 \end{cases}$ 。若 a 、 b 、 c 為三個相異的實數且滿足 $f(a) = f(b) = f(c)$ ，試求 $a+b+c$ 的取值範圍為何？