

## 102 年度第二學期第二次定期考高二自然組數學試題

一、多重選擇題(共 48 分)(共 6 小題，每題至少有一個選項正確。所有選項均答對得 8 分；答錯 1 個選項得 5 分；答錯 2 個選項得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答以零分計算。)

1. 下列是有關  $x, y, z$  一次方程組的增廣矩陣，則何者表示的一次方程組恰有一組解？

$$(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (B) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (C) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

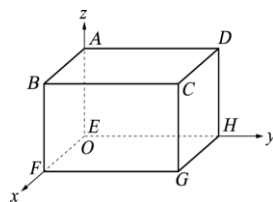
$$(D) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (E) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 設  $A, B, C$  均為  $n$  階方陣， $I, O$  分別是  $n$  階單位方陣和零矩陣，則下列各敘述何者正確？

- (A)  $(A+B)C = AC + BC$       (B)  $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$   
 (C)  $(AB)C = A(BC)$       (D) 若  $A^2 = O$ ，則  $A = O$   
 (E) 若  $A^2 = A$ ，則  $A = O$  或  $A = I$

3. 如圖之長方體，設坐標  $E(0, 0, 0), A(0, 0, 2), F(1, 0, 0), H(0, 3, 0)$ ，則下列各敘述何者正確？

- (A) 平面  $AFH$  的方程式為  $x + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$   
 (B) 平面  $BDG$  的方程式為  $6x + 2y + 3z = 12$   
 (C) 平面  $AFH$  與平面  $BDG$  平行  
 (D) 平面  $AFH$  與  $xy$  平面的銳夾角大於  $60^\circ$   
 (E) 平面  $AFH$  與平面  $BDG$  的距離為  $\frac{6}{7}$



4. 空間中四直線  $L_1, L_2, L_3, L_4$ ，其方程式如下：

$$L_1: x-1 = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{3}, \quad L_2: x = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{3}, \quad L_3: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{3} = z,$$

$$L_4: \begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t \\ z=3t \end{cases}, t \text{ 為任意實數, 則下列各敘述何者正確?}$$

- (A)  $L_1$  與  $L_2$  重合                      (B)  $L_1$  與  $L_4$  平行  
 (C)  $L_2$  與  $L_3$  相交於一點              (D)  $L_3$  與  $L_4$  互為歪斜線  
 (E)  $\frac{x}{3} = y-3 = \frac{z}{4}$  為直線  $L_2$  與  $L_3$  的一角平分線

5. 設空間中直線  $L$  在平面  $E$  上, 點  $A(1, 2, 3)$  是平面  $E$  外一點, 已知點  $A$  在平面  $E$  與直線  $L$  的投影點分別是  $P(0, 1, 2)$ 、 $Q(a, 2, 1)$ , 則下列各敘述何者正確?

- (A)  $a=1$                                       (B)  $P$  點到直線  $L$  的距離等於  $\overline{PQ}$  長  
 (C)  $(1, 1, 1)$  是平面  $E$  上一點      (D) 直線  $L$  的方向向量為  $(-1, 1, 3)$   
 (E)  $(2, 1, 0)$  是直線  $L$  上一點

6. 解方程組  $\begin{cases} E_1: x+y+z=1 \\ E_2: 2x+3y+az=3 \\ E_3: x+y+a^2z=a \end{cases}$ , 則下列各敘述何者正確?

- (A) 當  $a=0$  時, 方程組有一組解  $(0, 0, 1)$   
 (B) 當  $a=-2$  時, 有一組解, 圖形為  $E_1, E_2, E_3$  恰交於一點  
 (C) 當  $a=-1$  時, 無解, 圖形為  $E_1, E_2, E_3$ , 其中兩平面平行另一平面與之各交於一線  
 (D) 當  $a=1$  時, 有無限多組解, 圖形為  $E_1, E_2, E_3$  交於一線  
 (E) 當  $a=2$  時, 無解, 圖形為  $E_1, E_2, E_3$ , 兩兩相交於一線且此三線不共點

## 二、填充題 (共 42 分) (每題 6 分)

1. 設矩陣  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 則  $2A(B-C) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 設  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 求  $A^{30} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 矩陣  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 6 \\ 2 & b & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  經矩陣列運算化簡得  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & c \end{bmatrix}$ , 試求  $a+b+c = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 設  $x, y, z$  一次方程組  $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  與

$$\begin{bmatrix} a_1 - a_2 + a_3 & b_1 - b_2 + b_3 & c_1 - c_2 + c_3 \\ 2a_1 - a_2 & 2b_1 - b_2 & 2c_1 - c_2 \\ 3a_1 - a_2 + 2a_3 & 3b_1 - b_2 + 2b_3 & 3c_1 - c_2 + 2c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$
 有相同的唯一

解, 求實數數對  $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 設直線  $L_1: \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$  與直線  $L_2: \frac{x-1}{a} = \frac{y}{1} = \frac{z}{b}$  垂直,

則數對  $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

6. 設  $A(1, 2, 3)$  為平面  $E: x+2y+2z=2$  外一點, 若平面  $E$  上有一以  $B(2, 1, -1)$  為圓心, 半徑是 1 的圓  $\Gamma$ , 且  $P$  為圓  $\Gamma$  上的點, 則  $\overline{AP}$  有最小值時, 此時點  $P$  的坐標為  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

7. 空間中兩歪斜線  $L_1: x-1 = \frac{y}{-4} = z+2$  與  $L_2: \begin{cases} 2x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$  之間距離為  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

### 三、計算題 (共 10 分)

1. 設空間中兩點  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 0, 1)$ , 若  $P$  為直線  $L: \begin{cases} x-3y+5=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$

上一點, 求  $\triangle PAO$  面積最小值為?, 此時點  $P$  的坐標為?