102 年度第二學期第三次定期考高二自然組數學試題

一、多重選擇題（共 20 分，每題 10 分，每答對一個選項得 2 分，選項各別計分，至少有一個是正確的選項，答錯不倒扣，未作答不予計分。）

1. 設二階方陣 $A=\begin{bmatrix}\cos15^\circ & -\sin15^\circ\\ \sin15^\circ & \cos15^\circ\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\cos30^\circ & -\sin30^\circ\\ \sin30^\circ & \cos30^\circ\end{bmatrix}$，

   $C=\begin{bmatrix}\cos75^\circ & \sin75^\circ\\ \sin75^\circ & -\cos75^\circ\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}95 & 0\\ 0 & 27\end{bmatrix}$，請選出正確的選項。

   (A) $AB=BA$　(B) $AC=CA$　(C) $AD=DA$

   (D) $B^{11}=B^{-1}$　(E) $C^{11}=C^{-1}$

2. 在坐標平面上，請選出與雙曲線 $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$ 的圖形<u>**不相交**</u>的直線。

   (A) $x=4$　(B) $y=4$　(C) $y=x$　(D) $5x-4y=0$　(E) $5x-4y=1$

二、填充題（共 70 分，每題 5 分。）

1. 已知 A,B,C 均為二階方陣，且 A,B,C 都有反方陣，又 $B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}5 & 12\\ 6 & 16\end{bmatrix}$，

   $C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$，則化簡矩陣 $(ABC)^{-1}=$______。

2. 已知有一背包客旅行於某地，而當地只有甲、乙兩間旅館可供選擇，如果今晚他住某間旅館的話，則明晚續住此間旅館的機率為 $\frac{1}{3}$，住另一間旅館的機率為 $\frac{2}{3}$。已知此人星期一晚上決定住甲旅館，則三天後的星期四晚上他也住在甲旅館的機率為______。

3. 設有甲乙兩袋，甲袋中有 2 個白球，乙袋中有 2 個紅球，每球被取到的機會相同，我們把以下操作稱為<u>**一次操作**</u>：同時自甲袋和乙袋中各任取一球，並且放入另外一袋內。在經過長期的操作後，則甲袋中仍是 2 個白球的機率為______。

4. 在坐標平面上，點$(1,3)$與點$(1,4)$經過二階方陣A的線性變換後，分別變成點$(24,23)$與點$(29,30)$，則方陣$A=$______。

5. 在坐標平面上，已知二階方陣$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 4\end{bmatrix}$，而$P$、$Q$、$R$三點經過方陣$A$的線性變換後分別變成$P'$、$Q'$、$R'$三點，又$\overline{P'Q'}=10$，$\overline{Q'R'}=14$，$\overline{R'P'}=16$，則$\triangle PQR$面積的值為______。

6. 在坐標平面上，設拋物線Γ的焦點為$(1,3)$，焦點在準線上之投影點為$(1,4)$，則此拋物線Γ的方程式為______。

7. 在坐標平面上，設拋物線Γ的準線垂直於x軸，且Γ通過點$(2048,1)$，$(2048,2)$，$(x_0,3)$，$(1946,4)$，則x_0之值為______。

8. 在坐標平面上，設直線$L:y=x-4$與拋物線$\Gamma:x^2=-4y$相交於P、Q兩點，若F表拋物線Γ的焦點，則$\overline{PF}+\overline{QF}$之值為______。

9. 在坐標平面上，設P為橢圓$\Gamma:\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{x^2}{9}=1$上一點，$F_1$、$F_2$為兩焦點，若$\angle F_1PF_2=60°$，則$\triangle PF_1F_2$的面積之值為______。

10. 在坐標平面上，已知一橢圓$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，試求各邊平行於坐標軸且內接於橢圓的矩形中，其最大面積為______。

11. 在坐標平面上，已知橢圓通過點$P(\dfrac{3}{2},\sqrt{3})$，且兩焦點為$F_1(\sqrt{5},0)$、$F_2(-\sqrt{5},0)$，則此橢圓的方程式為______。

12. 在坐標平面上，設點A、B分別在x軸、y軸上移動，且$\overline{AB}=1$，若點P在直線AB上，但是不在線段$\overline{AB}$上，且$\overline{AP}:\overline{BP}=2:3$，則動點$P$的軌跡方程式為______。

13. 在坐標平面上，雙曲線Γ的兩焦點為$(2,9)$、$(8,9)$，且其貫軸長度為$2\sqrt{7}$，則Γ之**共軛雙曲線**的方程式為______。

14.在坐標平面上，已知Γ為等軸雙曲線，其中一條漸進線方程式為 $x-y-4=0$，而Γ的中心為$(p,4)$，且Γ通過$(3,0)$、$(3,q)$兩點，令Γ的貫軸長度為r，則有序數組$(p,q,r)=$______。

三、計算題（共 10 分，每小題 5 分，必須寫出演算過程，否則將予扣分。）

1. 設二階方陣$P=\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix} -27 & 42 \\ -20 & 31 \end{bmatrix}$，$n$為正整數，試求：(1) $P^{-1}AP$。（5 分）　(2) A^n（以n表示）。（5 分）