102 年度第二學期第三次定期考高二數學(社)試題

一、單選題：(每題答對得 6 分，答錯不倒扣)

1. 坐標平面上方程式 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的圖形與 $x^2=y+4$ 的圖形共有幾個交點?

   (1)0 個 (2)1 個 (3)2 個 (4)3 個 (5)4 個 .

2. 設雙曲線 Γ ： $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，$P$ 為其上動點，F 為 Γ 的右焦點 . 若 $\overline{PF}=8$，則雙曲線上滿足此條件的 P 點共有幾個？

   (1)0 個 (2)1 個 (3)2 個 (4)3 個 (5)4 個 .

二、多選題(每題全對得 10 分，錯一個選項得 8 分，錯兩個得 6 分，錯三個得 4 分，錯四個得 2 分，錯五個 0 分)

1. 請選出正確的選項 .

   (1)方程式 $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\frac{|3x-4y-1|}{5}$ 的圖形為拋物線

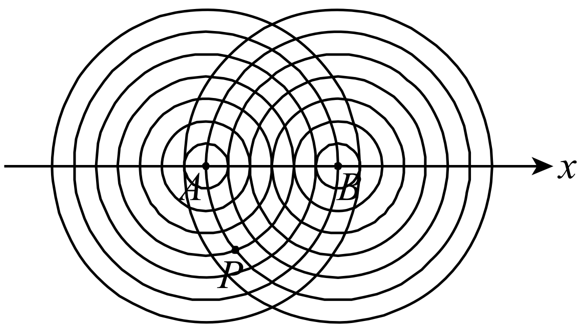
   (2)方程式 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=4$ 的圖形為橢圓

   (3)方程式 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=5$ 的圖形為線段

   (4)方程式 $\left|\sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}\right|=6$ 的圖形為兩條射線

   (5)方程式 $\left|\sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}\right|=3$ 的圖形為雙曲線 .

2. 如圖，在坐標平面上，分別以 A $(-3,0)$，B $(3,0)$為圓心，依 1 單位、2 單位、3 單位、…、7 單位為半徑，分別做一系列的同心圓 . 若 $P(m,n)$之位置如圖，為其中兩個圓的交點，請選出正確的選項 .



(1) $\overline{PA}+\overline{PB}=10$

(2)若點 P 在以 A,B 為焦點的橢圓上，則此橢圓的短軸長為 6

(3)若點 P 在以 A,B 為焦點的雙曲線上，則此雙曲線的共軛軸長為 8

(4) m,n 滿足方程式$(m+3)^2+n^2=36$

(5) P 點坐標為$\left(-\frac{5}{3},-\frac{8}{3}\sqrt{2}\right)$.

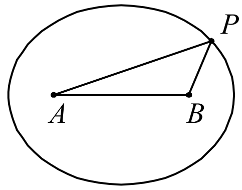
三、填充題：(每題 7 分，填錯格一律不給分，每題答案要完全正確才給分)

1. 已知二階方陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}$, 且 $AX=\begin{bmatrix}-2&3\\-4&0\end{bmatrix}$ 則二階方陣 X = ____________ .

2. 設拋物線 Γ 的對稱軸在 x 軸上，準線在 y 軸上，且通過點$(5,4)$，則 Γ 的正焦弦長為________________ . (有兩解)

3. 已知雙曲線Γ的貫軸在 y 軸上, 一焦點為 $F(0,-3)$, 一漸近線為 $L:2y-\sqrt{5}x=0$，則Γ的共軛雙曲線之方程式為______________ . (請寫標準式)

4. 如圖, 橢圓方程式為$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$，$m,n>0$，其中 A, B 為橢圓的兩焦點，$P\left(r,\frac{12}{5}\right)$為橢圓上一點，已知 $\triangle PAB$ 之面積及周長分別為$\frac{36}{5}$及 16，則數對(m,n)=__________ .



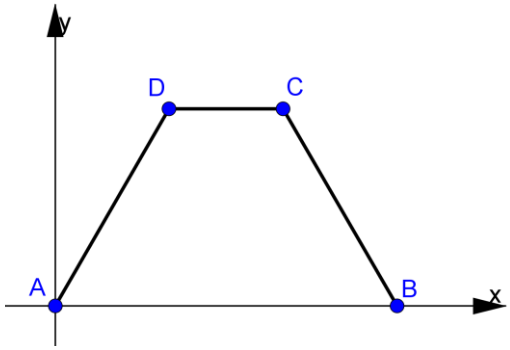
5. 已知拋物線Γ_1：$y^2=20x$，設有一橢圓Γ_2，若Γ_2的中心為Γ_1的頂點，且Γ_2長軸上的頂點為Γ_1的焦點，以及Γ_2的短軸長為 8，則橢圓Γ_2的方程式為______________ . (請寫標準式)

6. 與橢圓$\frac{x^2}{21}+\frac{y^2}{17}=1$共焦點且過點$(2,\sqrt{2})$的雙曲線方程式為_____________ . (請寫標準式)

7. 坐標平面上給定點 $A(-4,5)$, 直線 L： $x=9$ 與拋物線 Γ：$y^2=-16x$, 以 $d(P,L)$

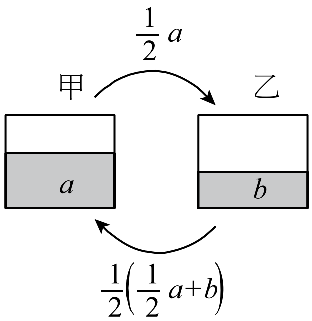
表示點 P 到直線 L 的距離．若點 P 在 Γ 上變動，當 $\left|d(P,L)-\overline{AP}\right|$ 有最大值時，P 點的坐標為____________．

8. 如下圖所示，坐標平面上，A 為原點，且點 $B(6,0)$ 為定點，作梯形 $ABCD$，使得 $\overline{DC}$ 平行 $\overline{AB}$，且 $\overline{DC}=2$ 為定值，$\overline{AD}+\overline{BC}=8$ 亦為定值，已知動點 C 的軌跡在一二次曲線上，則此二次曲線的方程式為____________．(請寫標準式)



四、計算題：(12 分)

有甲、乙兩支足夠大的瓶子，開始時兩瓶分別裝有 a 公升與 b 公升的水．每一輪操作都是先將甲瓶的水倒出一半到乙瓶，然後再將乙瓶的水倒出一半回甲瓶，在過程中水不會溢出來．



(1)若操作一輪後甲乙兩瓶水量分別為 $pa+qb$ 公升與 $ra+sb$ 公升，其中 p,q,r,s 為常數，試求序組 (p,q,r,s)．(4 分)

(2)若初始甲乙兩瓶水量分別為 $\frac{1}{4}$ 公升與 $\frac{3}{4}$ 公升，即 $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{3}{4}$，則操作二輪後乙瓶的水量為幾公升？(4 分)

(3)承(2)，長時間持續操作下去甲瓶的水量趨近於幾公升？(4 分)