

102 年度第二學期第一次定期考高二數學試題

一、**多重選擇題**：共 8 題。每題至少有一個選項是正確的，選出正確選項。每題答對得 6 分，答錯不倒扣，未答者不給分。每個選項 1.5 分，本大題總分四捨五入取至整數。

1. 已知空間中一點 $P(a, b, c)$ 至 x 軸、 y 軸、 z 軸的距離分別為 $\sqrt{41}$ 、 $\sqrt{34}$ 、 5 。若點 P 在第一卦限，請選出下列正確的選項。

- (1) P 至原點的距離為 $5\sqrt{2}$
- (2) P 對 xz 平面的對稱點為 $(3, 0, 5)$
- (3) P 對 y 軸的對稱點為 $(-3, 4, -5)$
- (4) P 對原點的對稱點為 $(-3, -4, 5)$

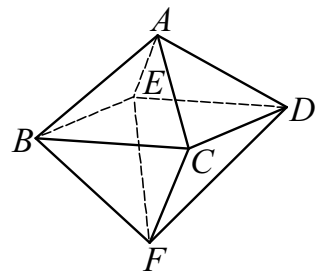
2. 設 $A(1, -1, 2)$ 、 $B(3, 1, 3)$ 、 $C(-4, -2, -4)$ ， H 為 $\triangle ABC$ 的垂心（三高的交點），請選出下列正確的選項。

- (1) $\angle BAC$ 為銳角
- (2) \vec{AH} 在 \vec{AB} 上之正射影為 $(-4, -4, -2)$
- (3) 點 C 在直線 AB 上之投影點坐標為 $(-3, -5, 0)$
- (4) 點 C 到直線 AB 之距離為 $\sqrt{26}$

3. 如圖(一)，有一八面體 $A-BCDE-F$ ，四邊形 $BCDE$ 為一邊長為 2 之正方形，其側面為八個等腰三角形，腰長為 $\sqrt{3}$ ，請選出下列正確的選項。(已知：

$$\text{錐體體積} = \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高})$$

- (1) 平面 ABE 與平面 $BCDE$ 的夾角為 45°
- (2) $\cos(\angle ABF) = \frac{1}{3}$



圖(一)

(3) 八面體的體積為 $\frac{1}{3}$

(4) 兩歪斜線 BE 與直線 AC 的距離為 $\sqrt{2}$

4. 設 $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 3 & x-1 & 2 \\ 2 & 3 & x-1 \end{vmatrix}$ 的展開式為多項式 $f(x)$ ，請選出下列正確的選項。

(1) $f(x)$ 為三次式

(2) $f(4) = 0$

(3) $f(0) = 52$

(4) $f(x) = 0$ 之實根為 -4

5. 設 \vec{a} 、 \vec{b} 為空間中不平行的二個非零向量， \vec{a} 、 \vec{b} 的夾角為 θ ，請選出下列正確的選項。

(1) $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$

(2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$

(3) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$

(4) 空間中向量 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 所張出之平行六面體的體積為 $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$

6. 如圖(二)，正立方體 $ABCD - EFGH$ 的稜長等於 2，

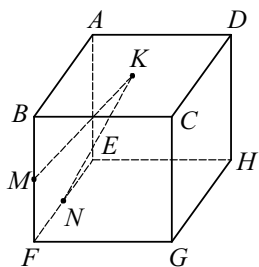
K 為正方形 $ABCD$ 的中心， M 、 N 分別為線段 \overline{BF} 、 \overline{EF} 的中點。請選出下列正確的選項。

(1) $\vec{KM} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}$

(2) $\triangle KMN$ 為一直角三角形

(3) 內積 $\vec{KM} \cdot \vec{AB} = 1$

(4) $\triangle KMN$ 之面積為 $\frac{\sqrt{10}}{2}$



圖(二)

7. 已知點 O 為原點，向量 $\overrightarrow{OA} = (-1, 2, 2)$ 、 $\overrightarrow{OB} = (0, 3, 4)$ ，且

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ ，其中 s 、 t 為實數。請選出下列正確的選項。

(1) 若 $s = \frac{1}{2}$ 且 $t = \frac{1}{3}$ ，則 P 點在 $\triangle OAB$ 的內部

(2) 若 $s + t = 1$ ，則 P 點在線段 \overline{AB} 上

(3) 若 P 點在線段 \overline{AB} 上，且 $\angle AOP = \angle POB$ ，則 $2s + 10t = 7$

(4) 若 $-2 \leq s \leq 3$ 且 $4 \leq t \leq 10$ ，則所有 P 點所成的圖形的面積為 $30\sqrt{29}$

8. 已知 $O(0, 0, 0)$ 、 $P(0, 0, 1)$ ，點 P 為正四面體的一個頂點，且 O 到正四面體的四個頂點的距離均為 1，設另一頂點 Q 的坐標為 (a, b, c) 。請選出下列正確的選項。

(1) 此正四面體的稜長 $> \frac{4}{3}$

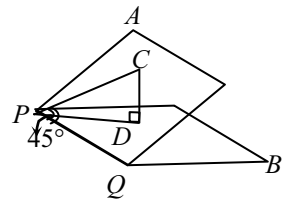
(2) $c < -\frac{1}{2}$

(3) $a^2 + b^2 > 0.9$

(4) $\cos(\angle POQ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

二、填充題：每題 7 分，共 6 題。

1. 如圖(三)，平面 APQ 與平面 BQP 所交成的一個二面角其角度為 60° ， C 在平面 APQ 上，且 $\angle CPQ = 45^\circ$ ， C 對平面 BQP 的投影點為 D ， $\overline{CD} = 6$ ，求 \overline{PC} 在平面 BQP 上之正射影長為_____。



圖(三)

2. 設 $\overrightarrow{OA} = (-2, 0, 1)$ 、 $\overrightarrow{OB} = (2, 2, 3)$ ，若 \overrightarrow{OC} 與 \overrightarrow{OB} 垂直， \overrightarrow{OA} 與 \overrightarrow{BC} 平行，且 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}$ ，試求 $\overrightarrow{OD} =$ _____。

3. 已知由三向量 $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 、 $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 所張出之平行六

面體的體積為 12，求由三向量 $3\vec{a} + \vec{b}$ 、 $\vec{b} - 3\vec{c}$ 、 $2\vec{c}$ 所張出之平行六面體的體積_____。

4. 已知 $\triangle ABC$ ，其三邊長 $\overline{AB} = c$ 、 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{CA} = b$ ，求行列式

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 4\cos A + 5\sin A & 4\cos B + 5\sin B & 4\cos C + 5\sin C \\ 2\cos A & 2\cos B & 2\cos C \end{vmatrix}$$

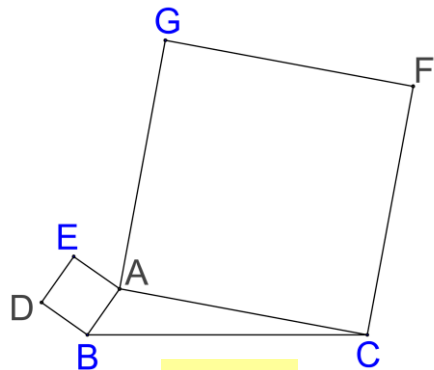
展開之值_____。(化到

最簡)

5. 設 $\triangle ABC$ 中 $A(1,0,0)$ 、 $B(6,0,0)$ 、 $C(3,2,1)$ ， H 為 $\triangle ABC$ 的垂心（三高的交點），若 $\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，則求實數對 (x,y) _____。

6. 如圖(四)， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 10$ ， $\overline{CA} = 9$ ，四邊形 $ABDE$ 及四邊形 $ACFG$ 為

正方形，則求內積 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CG}$ 之值_____。



圖(四)

三、計算題(共 1 題，共 10 分。必須寫出計算過程，否則不予計分。)

已知實數 x, y, z 滿足 $2x + y + z = 10$ ，求：

(1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x$ 的最小值。(7 分)

(2) 當 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x$ 有最小值時，此時 x, y, z 的值。(3 分)