

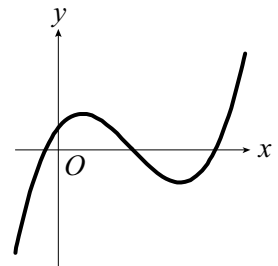
102 學年度第二學期第二次定期考高三自然組數學試題

一. 單選題 (共 15 分)

- 數 $f(x) = x^2 - x + 1$ 的圖形上，已知以點 P 為切點的切線斜率為 3，則 P 點的坐標為
(1) $(2, 3)$ (2) $(2, -3)$ (3) $(-2, 3)$ (4) $(-2, -3)$ (5) $(-3, -2)$.
- 定義如下： $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \geq 1 \\ x^2 - x, & x < 1 \end{cases}$ ；若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 處可微分，則 $a =$
(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) -1 (5) -2 .
- 多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1) = 2$ 及 $f'(1) = -1$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(1) - f(x)}{x - 1} =$
(1) 1 (2) 2 (3) -1 (4) 5 (5) 不存在 .

二. 多選題 (共 24 分，單題所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。)

- 設 $f(x) = x^2 + 2x$ 的圖形與 x 軸及 $x = 0, x = 3$ 所圍成的區域為 R ，將閉區間 $[0, 3]$ 等分成 n 等分，並設 R 的面積之上和為 U_n ，下和為 L_n 。則下列何者正確？
(1) $U_{11} > R > L_{11}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = R = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ (3) $U_{30} > L_{2014}$ (4) $U_{25} < L_{2020}$
(5) $U_{105} > U_{2016} > L_{2016} > L_{105}$.
- 右圖為 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的大略圖形，則下列選項何者正確？
(1) $a > 0$ (2) $b > 0$ (3) $c > 0$ (4) $d > 0$ (5) $b^2 - 3ac > 0$.



6. 下列何者為嚴格遞減函數？

- $f_1(x) = -3x + 5$ (2) $f_2(x) = (\frac{1}{3})^{-x}$ (3) $f_3(x) = (\frac{1}{2})^x$ (4) $f_4(x) = x^2$
(5) $f_5(x) = -|x|$

三.填充題 (每題 8 分, 共 40 分)

- A. 設 $a, b, c \in \mathbf{Z}$, 已知兩曲線 $\Gamma_1: y = x^2 + ax + b$ 與 $\Gamma_2: y = -x^3 + c$ 在點 $P(1, -2)$ 處相切, 則(1) $a =$ _____, (2) $b =$ _____, (3) $c =$ _____。
- B. 多項式 $f(x) = (x^3 - x - 2)^{15}$ 除以 $(x - 1)^2$ 之餘式為 _____。
- C. 已知方程式 $x^3 - 3x^2 - 9x + k = 0$, 有三個相異實根, 求 k 的範圍為 _____。
- D. 已知 $-3 \leq a < b \leq 3$, 有一橢圓方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, 在 $x = a$ 與 $x = b$ 之間的面積為 15, 另一個橢圓方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$ 在 $x = a$ 與 $x = b$ 之間圍成的面積為 _____。
- E. $\int_0^3 [x+1] dx =$ _____ . (註: 其中 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數)

四、計算題 (2 題, 共 21 分)

- 試求出兩拋物線 $y = x^2$ 與 $x = y^2$ 所圍區域之面積。(9 分)
- 由拋物線 $y = f(x) = x^2 + 4$ 與直線 $y = 0$, $x = 0$ 及 $x = 2$ 所圍成的區域 S 。今將原點到 $(2, 0)$ 之間的線段 n 等分, 所得 n 個等寬的長條, 令長條之面積上和為 U_n , 下和為 L_n , 則
(1) $U_n = ?$ (2) 若欲使 $U_n - L_n < 0.1$, 則 n 之最小正整數值為何?