

102 學年度第二學期第一次定期考高三數學甲試題

一、單選題：5%

1. 設 $y=f(x)$ 的圖形如附圖，則 $y=f(x)$ 的方程式，在下列的選項中，哪一個最適合？

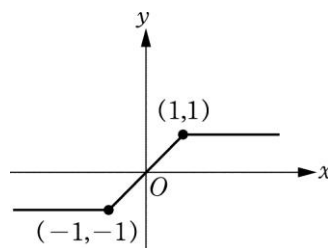
(A) $f(x) = \frac{1}{2}(|x-1| + |x+1|)$

(B) $f(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|)$

(C) $f(x) = \frac{1}{2}(|x-1| - |x+1|)$

(D) $f(x) = |x-1| + |x+1|$

(E) $f(x) = |x-1| - |x+1|$



二、多選題：10%(每題 5%, 錯一選項扣 2%, 錯三選項或三選項以上該題 0%)

1. 下列敘述何者為真？

(A) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續

(B) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在

(C) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續

(D) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

(E) 若 $f(a)$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

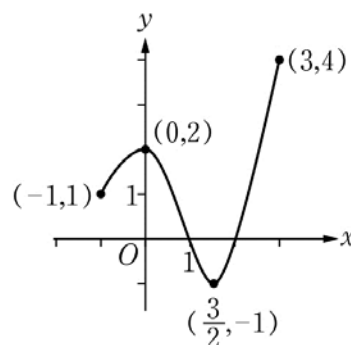
2. 函數 $f(x)$ 的定義域為 $\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$ ，圖形如附圖，下列哪些選項正確？

(A) $f(0) = 2$

(B) $f(x)$ 的值域為 $\{y \mid -1 \leq y \leq 4\}$

(C) $f(f(3))$ 有意義

(D) 方程式 $f(x) = 0$ 有二個實根



(E) 方程式 $f(x)+2=0$ 有實根

三、填充題：72%(每格 6%)

1. 化 $0.25\overline{8}$ 為最簡分數 = a 。

2. 求無窮級數 $0.22 + 0.0202 + 0.002002 + 0.00020002 + \dots$ 之和為 b 。

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n+3}} =$ c 。

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + (a-b)x - (a+b)}{x} = 4$ ，則數對 $(a, b) =$ d 。

5. 無窮級數 $\frac{1}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{5}{5^3} + \dots + \frac{2n-1}{5^n} + \dots =$ e 。

6. 設 $a_n = \frac{\sqrt{1 \times 2} + \sqrt{2 \times 3} + \dots + \sqrt{n(n+1)}}{n^2}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ f 。

7. 設函數 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ， $x \neq 0, 1$ ，又 $f_1(x) = f(x)$ ， $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ ，則 $f_{2014}(2) =$ g 。

8. 設 $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ ， $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ ，

(1) $f: A \rightarrow B$ 為一函數，若 $f(x)$ 為遞增函數，則這樣的 f 有 h 個。

(2) $g: A \rightarrow B$ 為一函數，若 $g(x)$ 為嚴格遞增函數，則這樣的 g 有 i 個。

9. 函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 滿足 $g(x) = 2x - 1$ 且 $f(g(x)) = 8x^3 - 12x^2 + 4x + 1$ ，則 $f(x) =$ j 。

10. 化簡 $\frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}) + \dots =$
 k 。

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \left(\frac{1-x^{20}}{1-x} - 20 \right) =$ l 。

四、計算證明題：13%

1. (1) 作圖： $y=|x^2-3x|-x+3$ 。(5%)

(2) $k \in R$ ，若方程式 $|x^2-3x|-x+3=k$ 有 4 個相異實根，求 k 的範圍。(3%)

2. 設 $f(x)=x+\log_a x$ ，其中 $a>1$ ，試證明：存在一實數 c 介於 0 與 1 之間，使得 $f(c)=0$ 。(5%)