102 學年度第二學期第一次定期考高三數學乙試題

一、單選題【每題 5 分，共 2 題，總分 10 分】

1. 下列哪一個選項中的數列其極限存在？

   (A) $<(-1)^n>$　**(B)** $<(\frac{\pi}{3})^n>$　**(C)** $<\cos n\pi>$　**(D)** $<\frac{n^3-1000}{n^2+1}>$

   (E) $<(\sqrt{2}-1)^n>$。

2. 設 $<a_n>$ 與 $<b_n>$ 為兩無窮數列，下列哪一個選項中的敘述恆是正確的？

   (A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$。

   (B) 若 $<a_n>$ 為**收斂數列**且 $<b_n>$ 為每項皆不為零之**發散數列**，則 $<\frac{a_n}{b_n}>$ 必為**發散數列**。

   (C) 若 $a_n \le c_n \le b_n$ 對所有自然數皆成立，且 $<a_n>$ 與 $<b_n>$ 均為**收斂數列**，則 $<c_n>$ 必為**收斂數列**。

   (D) 若 $<a_n>$ 為**收斂數列**且 $<b_n>$ 為**發散數列**，則 $<a_n+b_n>$ 必為**發散數列**。

   (E) 若 $a_n < b_n$ 對所有自然數皆成立且 $<a_n>$ 與 $<b_n>$ 均為**收斂數列**，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

二、多重選擇題【全對得 8 分，每答錯 1 個選項扣 3 分，未作答不計分。共 3 題，總分 24 分】

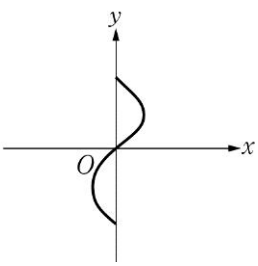
1. 下列哪些選項中的無窮級數**收斂**？

   (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}$　**(B)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$　**(C)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$　**(D)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

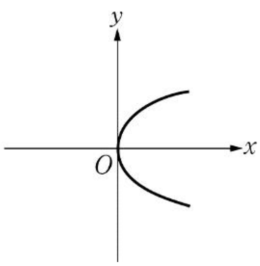
   (E) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$。

2. 下列哪些選項中的圖形表示 y 是 x 的函數？

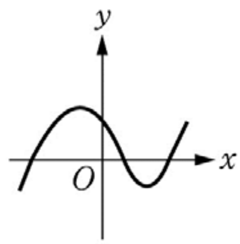
   (A)



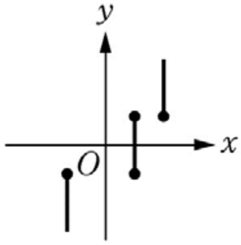
   (B)



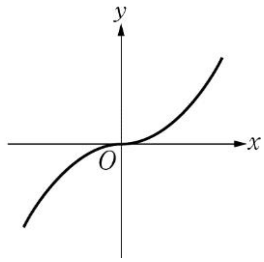
   (C)



(D)

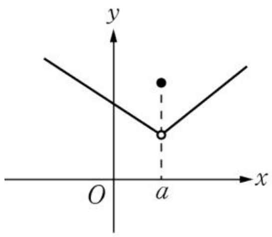


(E)

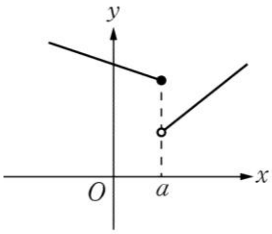


3. 下列哪些選項中函數 $y=f(x)$ 的圖形使得 $\lim f(x)$ 存在？

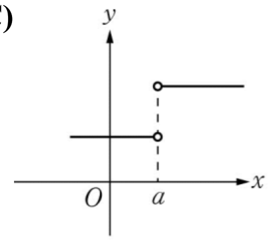
(A)



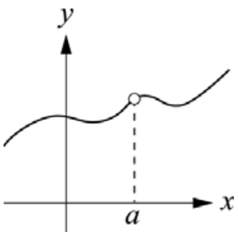
(B)



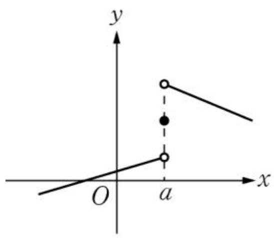
(C)



(D)



(E)



三、填充題【共 10 格，總分 51 分，計分公式如下】

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
分數	8	16	24	32	36	39	42	45	48	51

1. 請求出下列各式之極限。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{n+1}-\dfrac{2n^2+2}{n+2}\right)=$________A________。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+4^n}{2^n+4^{n-1}}=$________B________。

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=$________C________。

(4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-5x+6}=$________D________。

2. 若$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{2n^2+n+4}=4$，則$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+a_n}$之值為_______E_______。

3. 循環小數$0.3\overline{27}$之最簡分數為_______F_______。

4. 設無窮等比級數$3+\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\cdots+\frac{3}{4^{n-1}}+\cdots$之和為$S$，且其前$n$項之和為$S_n$。

若$|S-S_n|<\frac{1}{10^3}$，則n的最小值為_____G_____。　　(已知$\log 2=0.3010$)

5. 設$D=\{x\in R\mid -5\le x\le 4\}$。若$f:D\to R$，且$f(x)=x^2-4x-1$，則函數$f$之值域為____H____。(請用集合或區間表示)

6. 若函數$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x+2}{x^2+x+1} & ,x\ge 1\\ ax-1 & ,x<1\end{cases}$在$x=1$連續，則常數$a$之值為____I____。

7. 若a與b皆為實數且滿足$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2+ax+b}=\frac{3}{7}$，則數對$(a, b)$為____J____。(全對才給分)

計算證明題【共 1 題，總分 15 分，須有計算過程否則不予計分。】

1. 設兩數列$a_n=2^n$，$b_n=n^2$，其中n為自然數。

(1) 比較數列$\langle a_n\rangle$與$\langle b_n\rangle$前面 5 項的大小並完成下面的表格。(4 分，錯 1 個位置扣 1 分)

n	1	2	3	4	5
a_n					
b_n					

(2) 若$a_n\ge b_n$對$n\ge k$均成立，請由(1)的結果推測自然數k的最小值。(2 分)

(3) 利用數學歸納法證明(2)的結果。(5 分，分段給分，請儘量寫清楚。)

(4) 請利用(3)的結果與夾擠定理證明$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$。(4 分)