102 學年度第二學期第一次定期考高一數學試題

第一部分：填充題（填充 A 未提示答案，請直接填入格，第 B 至 I 題須將答案填入所標示的列號（–）區域，每格僅可填入 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 其中之一。每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。）

A. 下圖中，圖 1 是以一正六邊形為中心，每邊向外擴張出一正方形，再將相鄰的正方形頂點連線而形成一正十二邊形，因此這個正十二邊形內有 6 個正三角形。圖 2 是以圖 1 為中心，周邊圍繞 6 個與圖 1 相同的正十二邊形；圖 3 是以圖 2 為中心，周邊圍繞 12 個正十二邊形；依此規則，圖k是以圖$k-1$為中心，周邊圍繞$6k-6$個與圖 1 相同的正十二邊形（$k\geq 2$）。假設圖 n 中有 t_n 個正三角形，則 $t_n-t_{n-1}=$ ____________（其中$n\geq 2$，答案請以n表示）

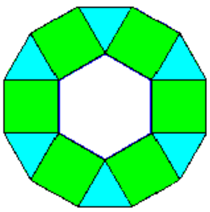


圖 1

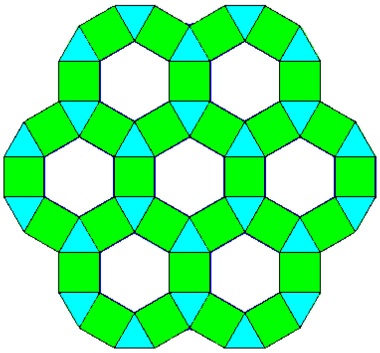


圖 2

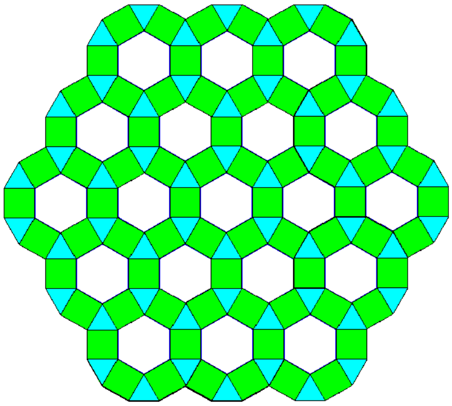
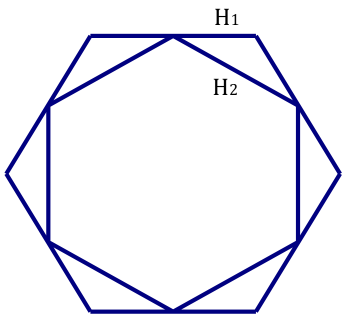


圖 3

B. 如右圖，將正六邊形 H_1 的各邊中點連線可形成一正六邊形 H_2，再依此法將正六邊形 H_k 的各邊中點連線而形成一正六邊形 H_{k+1}（其中整數$k\geq 2$）。設 H_1 的邊長為 16，且 H_k 的面積為 a_k（$k=1,2,3,4$），則

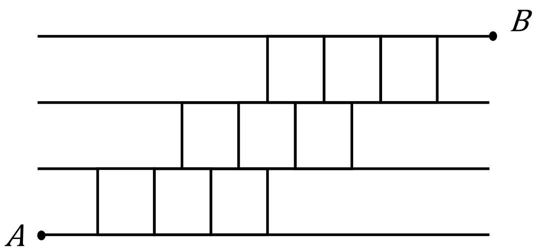


$\sum_{k=1}^{4} a_k =$ ________________。

C. 求 $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{4k^2-1} =$ ____________ （須化簡到最簡分數）

D. 設集合 $S_1=\{A, B, C, D, E\}$，$S_2=\{a, b, c, d\}$，$S_3=\{1, 2, 3\}$，從這三集合中各自選出一元素成一新集合 T，但要求相同的英文字母不得大小寫一起選出（如：T 可以是$\{E, b, 2\}$，但不能是$\{D, d, 3\}$），試問這樣的集合 T 有________種可能。

E. 如右圖，4 條水平線之間各有 4 條垂直通道，若要求只能向右走或向上走，則從 A 地到 B 地，有________種不同的走法。

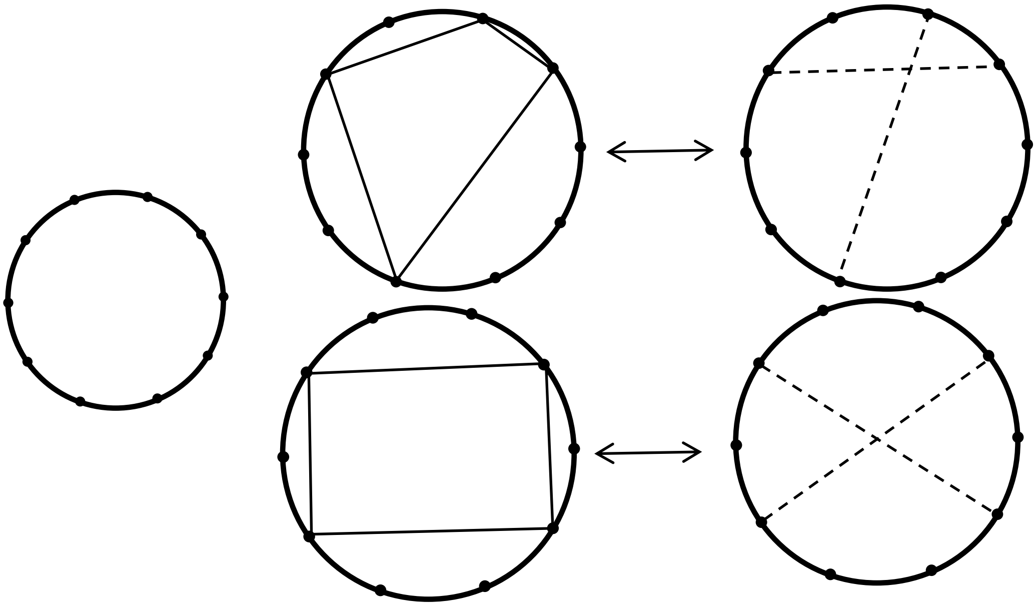


F. 將 12 用三個自然數之和來表示（不考慮次序，如$1+2+9$與$9+1+2$視為同一種方法），方法有__________ 種。

G. 在等比數列$\langle$ 2, 4, 8, 16, …$\rangle$中，數字 2 之前加入 1，數字 2、4 之間插入兩個 1，數字 4、8 之間插入三個 1，以此類推，在原數列第$k-1$項與第k項之間插入k個 1（其中$k\geq 2$），而形成新數列$\langle$ 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 8, 1, 1, 1, 1, 16, …$\rangle$，試問此新數列前 100 項的和為____________。

H. 在 1 到 1000 的正整數中，數字中至少含一個 5，且不是 5 的倍數（如：57、553 皆是），共有___________個。

I. 下圖中的黑點是圓內接正十邊形的頂點，其中任四點可決定一圓內接四邊形，若將四邊形的兩條對角線標出，會發現也是正十邊形的兩對角線。因此將這樣任選四點的圓內接四邊形，對應到一組正十邊形交點在圓內的對角線；同樣地任一組交點在圓內的對角線，以其



四個端點也可以對應到一個圓內接四邊形。試問圓內接正十邊形的頂點可決定_______個矩形。(如圖，矩形的對角線會互相平分且等長)

第二部分：計算證明題：(22 分)

1. 下圖是用連結器連結單位長不銹鋼條而成的四面體鐵架，圖 1 的小圈圈「。」表示連結器，圖 2 有兩層共 4 個連結器，圖 3 有三層共 10 個連結器，圖 4 有四層共 20 個連結器。試問依此規律，假設圖 n 中有 a_n 個連結器，

   (1) $a_n - a_{n-1}$ =？（其中 $n \geq 2$，答案請以 n 表示）(6 分)

   (2) 求 a_{10} =？（6 分）

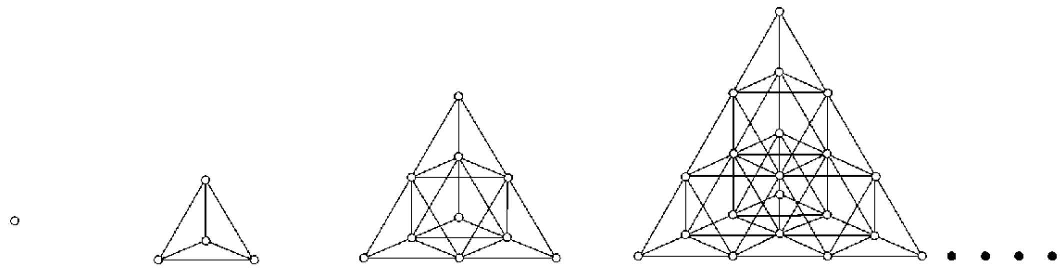


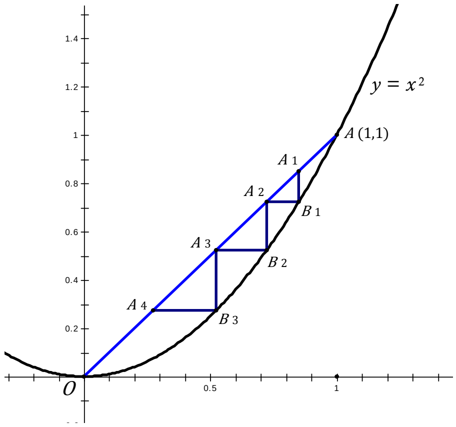
圖 1　　圖 2　　圖 3　　圖 4

2. 請以數學歸納法證明 $\sum_{i=1}^{n}\left((2i-1)^2-(2i)^2\right)$ 的結果：

$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2=-n(2n+1)$　　（ $n \in N$ ）(10 分)

第三部分：多重選擇題（每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 6 分；答錯 1 個選項者，得 4 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。）

1. 如圖所示，O 是座標平面上的原點，A 點座標(1, 1)，$\overline{OA}$上有一點A_1，鉛直向下移動至拋物線$y=x^2$上的B_1，再水平向左移動至$\overline{OA}$上的點A_2，再鉛直向下移動至拋物線上的B_2，再水平向左移動至$\overline{OA}$上的點A_3；依此規則，在$\overline{OA}$上可依序找到點A_1、A_2、A_3、…，假設其x座標分別是a_1、a_2、a_3、…。試問下列敘述何者正確？



(1) 數列＜a_1 ，a_2 ，a_3 ，…＞是一等差數列

(2)數列＜a_1 ，a_2 ，a_3 ，…＞是一等比數列

(3) 數列＜a_1 ，a_2 ，a_3 ，…＞既不是等差數列也不是等比數列

(4)數列＜$\log a_1$ ，$\log a_2$ ，$\log a_3$ ，…＞是一等差數列

(5)數列＜$\log a_1$ ，$\log a_2$ ，$\log a_3$ ，…＞是一等比數列

2. 市場預測 X 牌手機第 n 年台灣市場的佔有率x_n時，用下面的遞迴式評估：$x_{n+1}=2x_n(1-x_n)$ ，其中$x_1=0.2$,n是自然數。試問下列敘述何者正確？

(1) $x_2=0.32$　　(2) 數列＜x_1 ，x_2 ，x_3 ，…＞是一等比數列

(3) 對任意自然數 n，恆有$x_{n+1}\geq x_n$

(4) X 牌手機市佔率在此遞迴式下，預期數年後市場佔有率可以達0.6

(5)若 Y 牌手機美國市場市佔率y_n的遞迴式是$y_{n+1}=4y_n(1-y_n)$,

$y_1 = 0.2$，則對任意自然數 n 恆有$y_n \geq x_n$

3. 三正整數a, b, c滿足$a < b < c$，若數列$< a, b, c >$成等差數列，且數列$< a+1, b, c >$成等比數列，試問下列何者是c可能的值

 (1) 16 (2) 18 (3) 20 (4) 24 (5) 25

4. 已知 U 是宇集，A, B, C 是其子集（部分集合），若$|U| = 100$，$|A|=40$, $|B|=50$, $|C|=70$，$|B\cap C|=40$，試問下列敘述何者正確？

 (1) $|A\cap C|$可能等於 9

 (2) 若$|A\cap C|=10$，則$B\subset(A\cup C)$

 (3)若 $A\cap B$是空集合，則$|A\setminus C|$可能等於 9（其中 $A\setminus C$ 代表差集）

 (4) $A\cap B\cap C$可能是空集合

 (5)$|A\cap B|+|A\cap C|$的最小值是 20