

102 學年度第一學期第二次定期考高三數學甲試題

一、多重選擇題(每題全對得 8 分，只錯一個選項得 5 分，錯 2 個選項得 2 分，未作答或錯超過 2 個選項者得 0 分，共計 40 分)

- 下列選項中的函數，哪些週期為 $\frac{\pi}{2}$?
 - $f_1(x) = |\sin x| + |\cos x|$
 - $f_2(x) = \sin|x| + \cos|x|$
 - $f_3(x) = |\sin x + \cos x|$
 - $f_4(x) = \sin 2x + \cos 2x$
 - $f_5(x) = |\tan x| + |\cot x|$
- 考慮方程式 $6\pi \cdot \cos x = x$ 根之性質，下列選項哪些正確？
 - 實根個數為 12
 - 所有實根之和為 0
 - 最大實根與最小實根之和為正數
 - 所有實根均包含於區間 $[-6\pi, 6\pi]$
 - 正實根與負實根的個數相等
- 已知 $\omega = \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}$ ，下列選項哪些正確？
 - $\omega^6 = 1$
 - $1 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^8 + \omega^{10} = 0$
 - ω^k 和 ω^{12-k} 互為共軛複數，其中 k 為任意整數
 - $|1 + \omega| \cdot |1 + \omega^2| \cdot |1 + \omega^3| \cdot |1 + \omega^4| \cdot |1 + \omega^5| \cdot |1 + \omega^6| \cdot |1 + \omega^7| \cdot |1 + \omega^8| \cdot |1 + \omega^9| \cdot |1 + \omega^{10}| \cdot |1 + \omega^{11}| = 12$
 - $1 - \omega + \omega^2 - \omega^3 + \omega^4 - \omega^5 + \omega^6 - \omega^7 + \omega^8 - \omega^9 + \omega^{10} - \omega^{11} = 0$
- 已知 z_1 、 z_2 為相異複數且均不為 0，下列選項哪些正確？
 - $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
 - $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$
 - 若 $z_1 + z_2$ 恰為一實數，則 $\bar{z}_1 = z_2$

(D) 若 $|z_1 + z_2|^2 \geq |z_1|^2 + |z_2|^2$ 且 $|z_1 - z_2|^2 \geq |z_1|^2 + |z_2|^2$ ，則 $|z_1| = |z_2|$

(E) 若 $|z_1| = |z_2|$ ，則 $|z_1 - \bar{z}_2| = |z_2 - \bar{z}_1|$

5. 已知函數 $f(x) = x^2 + 4\left(\frac{3 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} - \sqrt{3}\right)x + 3(\sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta)^2$ ，其中

$x \in R$ ，且 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，請問下列選項哪些正確？

(A) $\frac{3 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{3}{2} \sin 2\theta$ (B) $\sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta = 2 + \cos 2\theta$

(C) $\sqrt{3} \sin 2\theta - \cos 2\theta - 4 < 0$

(D) 若 $\sqrt{3} \sin 2\theta + \cos 2\theta > 0$ ，則 $-\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{5\pi}{12}$

(E) 若 $-\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{5\pi}{12}$ ，則對任意實數 x ， $f(x)$ 的函數值恆為負數

二、填充題 (每格 6 分，共計 48 分)

1. $\frac{(\cos 130^\circ - i \cdot \sin 50^\circ)(\cos 30^\circ + i \cdot \sin 330^\circ)}{\cos 205^\circ + i \cdot \sin 155^\circ}$ 之值為_____。(請將所

有三角函數值計算出來)

2. 已知 $\left| \frac{(\sqrt{3} + i)^3}{2(a - i)^4} \right| = 1$ ，實數 a 之值為_____。

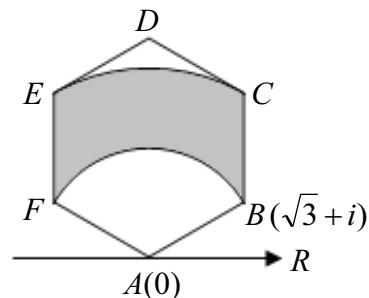
3. 已知 $0 \leq x \leq 2\pi$ ，方程式 $-2 \sin^2 x + \cos x + 1 = 0$ 的所有實根為_____。

4. 已知方程式 $x^3 = 4 - 4i$ 之所有根為 z_1 、 z_2 、 z_3 ，在複數平面上對應之點分別為 A 、 B 、 C ，且 $\text{Arg}(z_3) > \text{Arg}(z_2) > \text{Arg}(z_1)$ ，請回答下列問題：

(1) $\text{Arg}(z_3)$ 之值為_____，(2) 三角形 ABC 之面積為_____。

5. 若 z 為複數，且滿足下列二條件：(a) $|z - 4| = 5$ ，(b) $|z + 4| + |z - 4| = 10$ ，則 z 的所有可能值為_____。

6. 如圖，複數平面上一正六邊形 $ABCDEF$ ，其中 A 、 B 兩點所對應之複數依序為 0 和 $\sqrt{3} + i$ ，則



(1) 點 C 所對應之複數為_____

(2) 若以 A 為圓心，分別以 \overline{AB} 、 \overline{AC} 為半徑畫弧，得右圖之陰影區域，此區域面積為_____。

三、計算題(每小題 6 分，共計 12 分)

1. 已知 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ ，函數 $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x - 2\sqrt{3} \cos x - 2 \sin x$ ，請回答

下列問題：

- (1) 設 $t = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ ，請將 $f(x)$ 表示為 t 的多項式。
- (2) 函數 $f(x)$ 的**最大值**及**最小值**分別為何？