

102 學年度第一學期第一次定期考高一數學試題

一、多重選擇題：共 4 題，每題 8 分，共 32 分

(說明：每題至少有一個選項是正確的，只錯一個選項可得 6 分，錯兩個選項可得 4 分，錯三個選項可得 2 分，錯四個或四個以上選項不給分，整題未作答不計分。)

1. 設 a, b 為實數，請問下列哪些選項是正確的？

(A) 若 $a > b$ ，則 $a > \frac{3a+4b}{7} > b$

(B) 若 $a > b$ ， $ab \neq 0$ ，則 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(C) 若 $|a| > |b|$ ，則 $|b| + a > 0$

(D) 若 $0 < a < 6$ ， $0 < b < 8$ ，則 $\frac{6}{a} < \frac{6+b}{a+b} < \frac{6+8}{a+8}$

(E) 若 $0 < a < 6$ ， $0 < b < 8$ ， $\frac{6}{a} < \frac{8}{b}$ ，則 $\frac{6}{a} < \frac{6+8}{a+b} < \frac{8}{b}$

2. 請問下列哪些選項是正確的？

(A) 若 a^3 與 a^9 均為有理數，則 a 為有理數

(B) 若 $a, b, \frac{b}{a}$ 均為無理數，則 ab 為無理數

(C) 若 $a+b, a^2-b^2$ 均為有理數，則 a 與 b 均為有理數

(D) 若 a 為正無理數，則 \sqrt{a} 為無理數

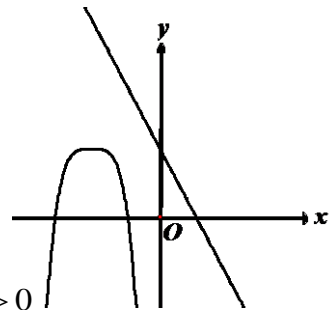
(E) $\sqrt{(0.00\bar{2}) \times (0.8\bar{)}} 為有理數$

3. 右圖為坐標平面上，一次函數 $y = ax + b$ 與

四次函數 $y = c(x+d)^4 + e$ 的部分圖形，請問

下列哪些選項是正確的？

(A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $d > 0$ (E) $e > 0$

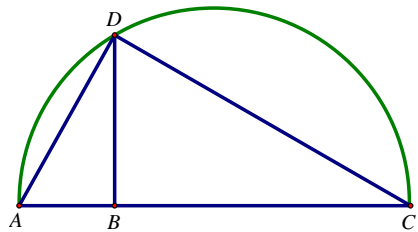


4. 設二次函數 $f(x) = ax^2 + bx$, $a < 0$ 。若 $f(13) > 0$, $f(14) < 0$, 請問下列哪些選項是正確的？
- (A) $2a - b > 0$ (B) $a + b > 0$ (C) $f(6) > f(7)$ (D) $f(7) < f(8)$
 (E) $f(8) > f(9)$

二、填充題：共 9 題，每題 6 分，共 54 分(說明：答案若為分數請化成最簡分數，若為根式請化成最簡根式)

1. 若一次函數 $y = ax + b$ 的圖形過點 $(-4, -3)$, 且斜率為 $\frac{1}{2}$, 則數對 $(a, b) =$ (1) 。
2. 方程式 $|x-2| = 2x-7$ 的解 $x =$ (2) 。
3. 若有理數 a, b , 滿足 $\sqrt{a - \sqrt{50}} = b - \sqrt{2}$, 則數對 $(a, b) =$ (3) 。
4. 設二次函數 $f(x) = 2x^2 - 4x + k$ 在 $-2 \leq x \leq 2$ 的範圍內的最大值為 M , 最小值為 m 。若 $M + m = 20$, 則實數 $k =$ (4) 。
5. 若一次函數 $y = m(x-2) + 1$ 與三次函數 $y = (x-2)^3 + 1$ 的圖形, 有三個相異的交點 $A(a, b), B(c, d), C(e, f)$, 則 $a + b + c + d + e + f =$ (5) 。

6. 如圖, 以 \overline{AC} 為直徑作一半圓, B 為 \overline{AC} 上一點, 過 B 作 \overline{AC} 垂直線交半圓於 D 。若 $\overline{BD} = 2$, $\overline{BC} = \sqrt{10 + \sqrt{84}}$, 而 $\overline{AB} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, 其中 a, b 為正整數, 則數對 $(a, b) =$ (6) 。



7. 設 a, b 為互質的正整數, 且 $b - a = 4$, 若將分數 $\frac{a}{b}$ 化為小數並用四捨五入法取至小數點後一位得 0.7, 則分數 $\frac{a}{b}$ 為 (7) 。(列出所有解)

8. 設 $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, 若將 $f(x)$ 的函數圖形向右平移 $2t$ 個單位, 再向下平移 t 個單

位後，其中 $t > 0$ ，得另一二次函數 $g(x)$ ；若 $g(x)$ 的圖形與 x 軸所截的線段長為 8，則 $t = \underline{\quad(8)\quad}$ 。

9. 已知一個直角三角形的周長為 20，則它的面積最大值為 $\underline{\quad(9)\quad}$ 。

三、計算證明題：2 題，共 14 分

(說明：答案務必寫在答案卷上，並必須標明題號，同時寫出演算過程或理由，否則將予扣分。)

1. (1) 因式分解 $x^3 - 8$ 。(3 分)

(2) 試證：當 $x > 2$ 時， $f(x) = x^3 - 8$ 的值恆為正數。(4 分)

2. (1) 設 a, b 均為實數，試證明： $|a| + |b| \geq |a + b|$ ，且當 $ab \geq 0$ 時，等號成立。(4 分)

(2) 若對任意實數 x ， $|x - 1| + |x - a| < 3$ 無解恆成立，試求實數 a 的範圍。(3 分)