101 年度第二學期第三次定期考高二自然組數學試題

一、多重選擇題：(28%，每題至少有一個選項正確，全部答對得 7 分，只錯一個選項得 4 分，答錯兩個選項得 2 分，答錯三個或三個以上選項得 0 分。未答者不給分。)

1. 兩圖形，若存在 $r>0$ 將其中一個等比例縮放 $(x, y)\to(rx, ry)$ 後，可使兩者重合，則稱此兩圖形為相似形。問：下列各選項中哪些圖形是相似形？
(A)拋物線　(B)共焦點的橢圓　(C)正焦弦長相等的橢圓
(D)有相同的漸近線之雙曲線　(E)等軸雙曲線

2. 關於雙曲線 H：$x^2-9y^2-6x+18y+36=0$ 的性質，下列何者正確？
(A)中心坐標為 $(3, 1)$　(B) $(-3, 1)$為一頂點　(C)貫軸長為 12
(D)正焦弦長為 36　(E)直線 L：$x+3y+2=0$ 與 H 恰有一個交點

3. 矩陣 $P=\begin{bmatrix}1 & p\\ 0 & 1\end{bmatrix}$、$Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & q\end{bmatrix}$，若橢圓 E_1：$x^2-6xy+13y^2+ax+by+9=0$ 經 P 推移後，得 E_2：$x^2+cy^2+dx+ey+9=0$；又，橢圓 E_2 經 Q 作伸縮變換後得圓 C：$x^2+y^2-6x-12y+9=0$，則下列各選項中，哪些是正確的？
(A) $p=3$　(B) $q=2$　(C) $\det(QP)=6$　(D)橢圓 E_1 之中心坐標為 $(12, 3)$
(E)橢圓 E_1 之面積為 72π

4. 已知拋物線 P_1：$y^2=5x$ 與拋物線 P_2：$y^2+5x-20y+100-10a=0$ 對稱於點 $A(a, 5)$，下列各選項中，哪些是正確的？
(A) $a=3$ 時，P_1 與 P_2 有兩個交點　(B) $a=5$ 時，P_1 與 P_2 恰有一個交點
(C) $a=7$ 時，P_1 與 P_2 沒有交點　(D)直線 $x-2y+5=0$ 與 P_1 恰有一個交點
(E) P_1 中，以點 $(9, 5)$為中點之弦在直線 $x-2y+1=0$ 上

二、填空題：(60 %，每個空格 6 分 。)

1. 已知 A 為二階方陣，若 $A\begin{bmatrix}11\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\ 28\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ -6\end{bmatrix}$，則 $A=$ ＿(甲)＿ 。

2. 平面上，二階方陣 B 之線性變換，若等同於「先對直線 $y=\sqrt{3}x$ 鏡射，再繞

原點旋轉 60°」，則 $B=$ ___(乙)___ 。

3. 坐標平面上，已知點 $A(a,12)$、$B(b,-2)$，a、b 都是正數，O 為原點，若 $\cos\angle AOB=\dfrac{3}{5}$ 且 $\overline{OA}=2\overline{OB}$，則 ΔOAB 之面積為 ___(丙)___ 。

4. 拋物線 $y=2x^2+20x+63$ 之對稱軸方程式為 ___(丁)___ 。

5. 拋物線 Γ：$y^2=4cx$ 中，c 為正數，F 為焦點，$\overline{AB}$ 為與 y 軸平行之一弦，若 $\overline{AF}=\overline{BF}=17$，$\overline{AB}=30>4c$，則拋物線 Γ 之焦點坐標為 ___(戊)___ 。

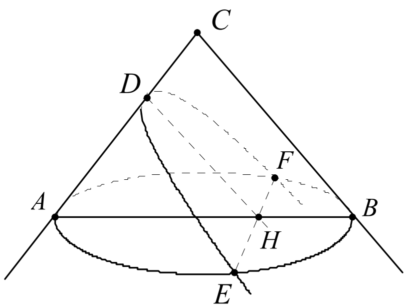
6. 若方程式 $\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x+k)^2+(y-1)^2}=2k$ 之圖形為一線段，則此線段之長為 ___(己)___ 。

7. 已知 F_1、F_2 為橢圓 $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{32}=1$ 焦點，$\overline{AB}$ 為過 F_1 之一焦弦，若 ΔABF_2 的面積為 32，則 $\overline{AB}$ 之長為 ___(庚)___ 。

8. 已知點 $A(16,3)$，雙曲線 Γ：$\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$，若 F_1 為 Γ 之右焦點，點 P 為 Γ 上一動點，則 $\overline{PA}+\overline{PF_1}$ 最小時之 P 點坐標為 ___(辛)___ 。

9. 若橢圓 E：$\dfrac{x^2}{21}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 與雙曲線 H 有共同的焦點，而且此兩圖形的 4 個交點同在一個面積為 6π 的圓上，則雙曲線 H 的方程式為 ___(壬)___ 。

10. 如右圖，有一圓錐 C-AB，其頂點為點 C，底圓一直徑為 $\overline{AB}$，$\overline{CA}=\overline{CB}$。今在 $\overline{CA}$ 上取一點 D，過 D 作 $\overline{DH}\,//\,\overline{CB}$ 交 $\overline{AB}$ 於 H；又過點 H 作 $\overline{EF}\perp\overline{AB}$ 交底圓於點 E、F，若 $\overline{CD}=12$，$\cos\angle ACB=-\dfrac{1}{3}$，則平面 DEF 在圓錐 C-AB 之側錐面上所截得之拋物線的正焦弦長為 ___(癸)___ 。



三、計算與證明題：(12 %。)

1. 平面上，已知 A 為直線 L 上一個定點，P 為該平面上的動點，若「點 P 與點 A 的距離」比「點 P 到直線 L 的距離」多一個定數，問：點 P 的軌跡為何？試在坐標平面上，以 L：$x=0$，$A(0,0)$，$d(P,A)-d(P,L)=3$ 為例，求點 P 的軌跡方程式，並作圖說明之。
2. 若點 P 是雙曲線之一支上的動點，點 E、F 為該雙曲線的兩個焦點，試證：ΔPEF 的內切圓恆過一個定點；並指出該定點所在；從而想想：若點 P 在全雙曲線二支上移動，則 ΔPEF 的內切圓圓心之軌跡為何？