

# 101 學年度第二學期第二次定期考高三自然組數學試題

一、多重選擇題：48分。每題全對得8分,僅一個選項錯誤得5分,僅兩個選項錯誤得2分,不答及三個錯誤(含)以上該題得0分

1. 下列各實函數, 哪些在  $x=0$  處可微分? ([ ] 為高斯函數)

(1)  $|x|$       (2)  $[x]$       (3)  $x|x|$       (4)  $|x^2 - x|$       (5)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

2. 實係數多項式函數  $f(x)$ , 下列算式哪些是正確的? ( $a, b \in R, a \neq b$ )

(1)  $\int_1^x 0 \times f(t) dt = 0$       (2)  $\int_1^x 1 \times f(0) dt = x$   
(3)  $\int_a^b -f(x) dx = \int_a^b f(-x) dx$       (4)  $\int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$   
(5)  $\int_{-a}^{-b} f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$

3.  $f(x)$  為實係數多項式函數, 下列敘述哪些是正確的?

- (1) 若  $f(x)$  在某區間內遞增, 則  $f(x)$  在此區間內的導數恆為正數
- (2) 若  $f(x)$  在某區間內之導數恆為正數, 則  $f(x)$  在此區間內必為遞增
- (3) 若  $f(x)$  在  $x = a$  處可微分且  $f'(a) = 0$ , 則  $f(a)$  為一極值
- (4) 若  $f(x)$  在  $x = a$  處連續, 則  $f'(a)$  必存在
- (5) 若  $f''(c) = 0$ , 則  $(c, f(c))$  是  $f(x)$  的一個反曲點

4.  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  為三次多項式函數, 且知其在區間  $[-2, -1]$  為遞增, 在區間  $[0, 1]$  為遞增, 在區間  $[-1, 0]$  為遞減, 則下列哪些是正確的?

(1)  $b = \frac{1}{2}$       (2)  $c = 0$       (3)  $d = 0$   
(4)  $f(-2) = 0$       (5)  $f(x)$  在區間  $(-5, -2)$  必為遞增

5. 關於函數  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ , 下列敘述哪些是正確的?

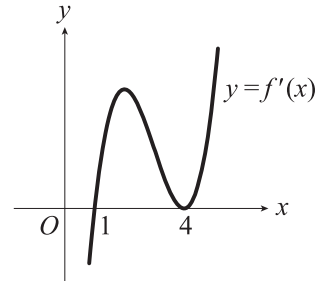
- (1) 函數  $f(x)$  的圖形在區間  $[-1, 0]$  凹口向上
- (2) 最大值為 27 且反曲點為  $(\frac{-1}{2}, \frac{27}{2})$

(3) 函數  $f(x)$  的圖形與直線  $x = -3$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  所圍成區域面積為  $\frac{123}{2}$

(4) 在點  $(2, f(2))$  的切線方程式為  $y = 4x + 3$

(5) 方程式  $2 - f(x) = 0$  有二正根一負根

6. 設  $f(x)$  的導函數  $f'(x)$  為實係數三次多項式函數，且  $f'(x)$  的部分圖形如右，試選出正確的選項？



(1)  $f(x)$  在  $x = \frac{1}{2}$  處之切線斜率為正

(2)  $f(x)$  在  $x = 1$  處有水平切線      (3)  $f(3) > f(4)$

(4)  $(4, f(4))$  是  $f(x)$  的一個反曲點      (5)  $f(x)$  有極大值，也有極小值

## 二、填充題：32分。每題8分

A. 設  $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx + 4$ ,  $a, b, c$  為實數，若  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = 4$ , 則

$(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

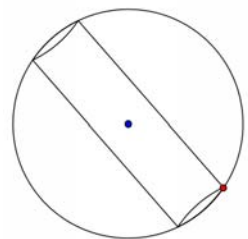
B. 設  $a$  為整數，若二曲線  $f(x) = x^2 + 2ax + 1$  與  $g(x) = x^3 - 2x + 1$  在交點處有共同的切線，則此公切線方程式為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

C.  $a \in R$ , 若  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - ax + 8 = 0$  只有一個實根，則  $a$  的範圍為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

D.  $A(-1, -5)$ ,  $B(1, -1)$ ,  $P$  為函數  $f(x) = x(x-1)(x+1)$  上之一點，且  $P$  不在第三象限，則  $\triangle ABP$  面積的最小值為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 三、計算題：20分。每題10分

I. 一圓及其內部繞一直徑旋轉可得一球體。若一顆半徑為 2cm 的球體形珍珠，貫穿中心精確挖去一半徑為  $\frac{1}{2}$  cm 的圓柱孔(如圖)，則挖完後，此顆珍珠的體積為多少  $\text{cm}^3$ 。



II.  $f(x)$  為實係數多項式函數，若

$$f(x) = -x^3 + x^2 \cdot \int_{-1}^2 f(t) dt - \frac{14}{3}x + \int_{-1}^x f(t) dt - 3, \text{ 試求 } f(x) = ?$$