101 學年度第二學期第一次定期考高三自然組數學試題

壹、多選題 **(共 4 題，每題 10 分。每題至少有一個選項是正確的，全對得 10 分，只答錯一個選項得 6 分，只答錯二個選項得 2 分，不作答或答錯三個以上(含三個)選項得 0 分)**

甲. 設$<a_n>$與$<b_n>$為兩實數數列，試問下列選項哪些正確？

(1)若數列$<|a_n|>$為收斂數列，則數列$<a_n>$必為收斂數列

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$，其中$l_1, l_2$為實數，則$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=l_1+l_2$

(3)若數列$<a_n+b_n>$與數列$<a_n-b_n>$皆為收斂數列，則數列$<a_n>$必為收斂數列

(4)若數列$<a_n+b_n>$與數列$<a_n-b_n>$皆為發散數列，則數列$<a_n>$必為發散數列

(5)若數列$<a_n>$為收斂數列，數列$<b_n>$為發散數列，則數列$<a_n\times b_n>$必為發散數列

乙. 設$<a_n>$、$<b_n>$與$<c_n>$皆為實數數列，試問下列選項哪些正確？

(1)若對於任何正整數n而言，有$a_n\le b_n\le c_n$且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$，其中$l$為實數，則$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$

(2)若對於任何正整數n而言，有$a_n< b_n< c_n$且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$，其中$l$為實數，則$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$

(3)若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$，其中$l$為實數，則必存在某一個正整數$M$，使得對於任何大於$M$的正整數$n$而言，有$a_n\le b_n\le c_n$

(4)若對於任何正整數n而言，有$a_n\le b_n\le c_n$且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l_2$，其中$l_1, l_2$為相異兩實數，則數列$<b_n>$必為收斂數列且數列$<b_n>$的極限值必介於$l_1$與$l_2$之間

(5)若數列$\langle b_n\rangle$為收斂數列，則必存在兩個收斂數列$\langle a_n\rangle$與$\langle c_n\rangle$，使得對於任何正整數n而言，有$a_n < b_n < c_n$，且這三個數列的極限值相同

丙. 設$f(x)$為實係數多項式函數且$f(1)=-2, f(3)=16, f(5)=4$，試問下列選項哪些正確？

(1)一定存在實數a滿足$1<a<3$，使得$f(a)=0$

(2)一定存在實數a滿足$1<a<3$，使得$f(a)=4$

(3)一定存在實數a滿足$1<a<3$，使得$f(a)=a^2$

(4)一定存在實數a滿足$1<a<5$，使得$f(a)=10$

(5)一定存在實數a滿足$1<a<2$，使得$f(a^3)=a$

丁. 設$f(x)$為定義域為閉區間$[1,5]$的實數值函數，試問下列選項哪些正確？

(1)若$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=7$，則$f(2)=7$

(2)若$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=7$，則$\lim_{x\to 2} f(x)=7$

(3)若$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$，則$f(x)$在$x=2$處是連續的

(4)若$f(x)$在$x=2$處是連續的，則$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)$

(5)若$\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=7$且$\lim_{x\to 2^-} f(x)$極限值存在，則$\lim_{x\to 2^-} f(x)=7$

貳、填充題(共 10 格，每格 6 分)

1. 設a,b為實數，已知$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n}{n+1}+\frac{an^2+bn}{n+2}\right)=4$，則數對$(a,b)=$ ____【1】____。

2. 試求下列各極限值：(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+4^{2n+1}}{3\cdot 5^n+2^{4n+1}}=$ ____【2】____。

   (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\Lambda\ \Lambda\ +(3n-2)}{n^2+100}=$ ____【3】____。

3. 設a,r皆為非零實數且$|r|<1$，令A為無窮等比級數$a+ar+ar^2+ar^3+\Lambda\ \Lambda$的和，$B$為無窮等比級數$a+ar^2+ar^4+ar^6+\Lambda\ \Lambda$的和，若$2A=3B$，則實數$r$的值為____【4】____。

4. 已知函數 $f(x)=x^2+2x$ ， $g(x)=x+3$ ，試化簡 $(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)=$ ____【5】____ 。

5. 若函數 $f(x)=\dfrac{8x+7}{2x^2+6x+4}$ ，則函數 $f(x)$ 的定義域為____【6】____，值域為____【7】____ 。

6. 試求下列各極限值：(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-9}=$ ____【8】____ 。

(2) $\lim\limits_{x\to 4}(\dfrac{4}{x-4}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-2})=$ ____【9】____ 。

7. 設 a,b 為實數，且 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x} & ,if\ \ 0\le x<1\\ ax+b & ,if\ \ 1\le x<2\\ x^2 & ,if\ \ 2\le x\le 3\end{cases}$ 在閉區間 $[0,3]$ 上為連續函數，則數對 $(a,b)=$ ____【10】____ 。